

Zusammenfassung der Vorlesung Analysis III (WS 09/10)  
(K.J. Witsch / N. Weck / D. Pauly)

## Inhaltsverzeichnis

<b>9</b>	<b>Strukturen der Analysis</b>	<b>2</b>
9.2	Differentiation in Banachräumen . . . . .	2
<b>10</b>	<b>Extrema</b>	<b>9</b>
<b>11</b>	<b>Der Satz von Taylor</b>	<b>10</b>
<b>12</b>	<b><math>K</math>-Flächen im <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>16</b>
<b>13</b>	<b>Maße</b>	<b>22</b>
13.1	Mengenringe und additive Mengenfunktionen . . . . .	22
13.2	Maßräume . . . . .	26
<b>14</b>	<b>Integration</b>	<b>33</b>
14.1	Meßbare Funktionen . . . . .	33
14.2	Definition und grundlegende Eigenschaften des Integrals . . . . .	34
14.3	Integrale in Produkträumen . . . . .	41
14.4	Die Konvergenzsätze und die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(A)$ . . . . .	47
14.5	Der Transformationssatz . . . . .	52

## 9 Strukturen der Analysis

### 9.2 Differentiation in Banachräumen

Im Folgenden seien  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  Banachräume über dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. In Analogie zu Definition 5.2 definiert man:

**Definition 9.39** (Differenzierbarkeit)

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $X$  und  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  eine Funktion, die jedem  $x \in \Omega$  ein  $y := f(x) \in Y$  zuordnet.  $f$  heißt differenzierbar in  $\hat{x} \in \Omega$ , wenn eine stetige lineare Abbildung  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  von  $X$  nach  $Y$  existiert, so dass gilt:

Ist mit  $\delta > 0$  die Umgebung  $U_\delta(\hat{x})$  ganz in  $\Omega$  enthalten, so gilt für alle  $h \in U_\delta(0)$

$$f(\hat{x} - h) = f(\hat{x}) + Ah + \|h\| \varphi(h) \quad (1)$$

mit einer in 0 stetigen Funktion  $\varphi : U_\delta(0) \rightarrow Y$  mit Wert  $\varphi(0) = 0$ .

Man erkennt direkt

**Satz 9.40** In der Situation aus Definition 9.39 ist  $f$  in  $\hat{x}$  stetig □

**Definition und Satz 9.41** (Die Ableitung einer d'baren Funktion)

In der Situation aus Definition 9.38 ist die lineare Abbildung  $A$  eindeutig bestimmt. Sie heißt Ableitung von  $f$  in  $\hat{x}$ , und wir schreiben  $f'(\hat{x}) := A$ .

**Beweis.** Sei  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  eine weitere lineare Abbildung und  $\sigma : U_\delta(0) \rightarrow Y$  eine in 0 stetige Funktion mit  $\sigma(0) = 0$  derart, dass für alle  $h \in U_\delta(0)$  gilt

$$f(\hat{x} - h) = f(\hat{x}) + Bh + \|h\| \sigma(h) \quad (2)$$

Dann implizieren (1) und (2) für jedes  $\zeta \in X \setminus \{0\}$  und  $t \in (0, \|\zeta\|^{-1} \delta)$  die Gleichung

$$f(\hat{x}) + tB\zeta + t\|\zeta\| \sigma(t\zeta) = f(\hat{x}) - tA\zeta + t\|\zeta\| \varphi(t\zeta)$$

und nach Subtraktion von  $f(\hat{x})$  und Division durch  $t$  folgt

$$B\zeta - A\zeta = \|\zeta\| \left( \sigma(t\zeta) - \varphi(t\zeta) \right) \xrightarrow{\text{für } t \rightarrow 0} 0$$

Wir erhalten  $B\zeta = A\zeta$  für alle  $\zeta \in X$  □

**Beispiel 1** (Differenzierbarkeit und Ableitung der Normfunktion)

Die Norm in  $X$  wurde durch ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } x \in X$$

Dann ist auch  $X \times X$  ein Banachraum mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \left( \|x\|^2 + \|y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Weiter ist die Funktion

$$f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

im festen Punkt  $(x, y) \in X \times X$  differenzierbar. Mit  $h := (k, l)$  ist nämlich

$$f((x, y) + h) = \langle x + k, y + l \rangle = \langle x, y \rangle + \langle k, y \rangle + \langle x, l \rangle + \langle k, l \rangle$$

Nun ist

$$A : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(k, l) \mapsto \langle k, y \rangle + \langle x, l \rangle$$

eine stetige lineare Abbildung und für alle  $(k, l) \in X \times X \setminus \{(0, 0)\}$  gilt

$$\langle k, l \rangle = \frac{\langle k, l \rangle}{\|(k, l)\|} \cdot \|(k, l)\| \quad \text{mit}$$

$$\left| \frac{\langle k, l \rangle}{\|(k, l)\|} \right| \leq \frac{\|k\| \cdot \|l\|}{(\|k\|^2 + \|l\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{\|k\|^2 + \|l\|^2}{(\|k\|^2 + \|l\|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

**Satz 9.42 (Metrische Kettenregel)**

Seien  $\Xi \subset X$  und  $\Omega \subset Y$  offene Teilmengen. Weiter seien  $x \in \Xi$  und  $y \in \Omega$  Elemente sowie  $f : \Xi \subset X \rightarrow Y$  und  $g : \Omega \subset Y \rightarrow Z$  Funktionen derart, dass  $f(x) = y$  ist. Ist  $f$  differenzierbar in  $x$  und  $g$  differenzierbar in  $y$ , so ist  $g \cdot f : D \subset X \rightarrow Z$  mit  $D := \{\tilde{x} \in \Xi \mid f(\tilde{x}) \in \Omega\}$ , differenzierbar in  $x$  mit der Ableitung

$$(g \cdot f)'(x) = g'(y)f'(x)$$

**Beweis.** Da  $f$  stetig in  $x$  ist gibt es zu der Offenen Umgebung  $\Omega$  von  $y = f(x)$  eine Umgebung  $U \subset \Xi$  von  $x$  mit  $f(U) \subset \Omega$ . Insbesondere ist also  $x$  ein innerer Punkt von  $D$ , das heißt, dass es ein  $\delta > 0$  mit  $U_\delta(x) \subset D$  gibt. Dann gilt für jedes  $h \in U_\delta(0)$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \cdot \|h\| \quad \text{mit } r(h) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Und mit genügend kleinem  $\varepsilon$  gilt für jedes  $k \in U_\varepsilon(0)$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + s(k) \cdot \|k\| \quad \text{mit } s(k) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow 0$$

Für  $h \in U_\delta(0)$  folgt dann

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g\left(f(x) + f'(x)h + r(h) \|h\|\right) \\ &= g\left(y + f'(x)h + r(h) \|h\|\right) \\ &= g(y) + g'(y)f'(x)h \\ &= \quad + \|h\| \left( g'(y)r(h) + s(k)\left(f'(x)\frac{h}{\|h\|} + r(h)\right) \|h\| \right) \end{aligned}$$

Hierbei ist  $g'(y)f'(x)$  eine stetige Lineare Abbildung von  $X$  nach  $Z$  und der Ausdruck in der großen Klammer geht für  $h \rightarrow 0$  gegen 0.  $\square$

**Definition und Satz 9.43** (Richtungsableitung)

Sei  $\Omega \subset X$  eine offene Teilmenge und die Funktion  $f : \Omega \rightarrow Y$  sei differenzierbar in  $x \in \Omega$ . Dann gilt für jedes  $\zeta \in X \setminus \{0\}$

$$f'(x)\zeta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\zeta) - f(x)}{t}$$

Sofern der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} f(x) = f'(x)\zeta := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\zeta) - f(x)}{t}$$

existiert, nennt wir ihn die Richtungsableitung zum Richtungsvektor  $\zeta$ .

Insbesondere nennt man im Fall  $X = \mathbb{R}^N$  die Richtungsableitung von  $f$  zum  $n$ -ten Einheitsvektor  $e^n$  die partielle Ableitung von  $f$  (in die  $n$ -te Richtung) und schreibt:

$$\partial_n f(x) := \frac{\partial}{\partial e^n} f(x)$$

Ist nun auch  $Y = \mathbb{R}^M$ , so lässt sich  $f$  schreiben in der Form

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_M(x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

Die Matrix, die bezüglich der kanonischen Basen in  $\mathbb{R}^N$  bzw.  $\mathbb{R}^M$  die Ableitung von  $f$  in  $x$  beschreibt, nennt man die *Jacobi-Matrix*. Sie ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_N f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_N f_2(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_M(x) & \partial_2 f_M(x) & \dots & \partial_N f_M(x) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(N, M) \quad (3)$$

Man beachte: Wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist, so ist die Ableitung von  $f$  im Punkt  $x$  durch (3) bezüglich der kanonischen Basen in  $\mathbb{R}^N$  und  $\mathbb{R}^M$  gegeben.

Uns interessiert nun die Umkehrung, und diese ist nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen richtig.

**Definition 9.44** (Mehrfach stetig differenzierbar)

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen und existieren zu gegebenen  $x \in \Omega$  die partiellen Ableitungen von  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  und sind diese stetig in  $\Omega$ , so nennt man  $f$  einmal stetig differenzierbar in  $\Omega$ . Wir schreiben  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sind  $f, \partial_1 f, \dots, \partial_N f \in C^k(\Omega)$  so nennt man  $f$   $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar und schreibt  $f \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ .

**Satz 9.45** Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$ , dann ist  $f$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  differenzierbar und die Ableitung ist durch die Jacobimatrix (3) gegeben.

**Lemma 9.46** Seien  $(X, d_x)$  und  $(Y, d_y)$  metrische Räume und die Funktion  $f : X \rightarrow Y$  sei stetig. Ist  $X$  kompakt, so ist  $f$  gleichmäßig stetig, also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X : d_x(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

**Definition 9.47** ((Parametrisierung von) Kurven)

Sei  $X$  ein Banachraum und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine stetige Funktion  $\gamma : I \rightarrow X$  nennt man (Parametrisierung einer) stetigen Kurve. Ist  $\gamma \in C^1(I, X)$  so spricht man von einer Parametrisierung einer stetig diff'baren Kurve. Ist  $\gamma \in C^1(I, X)$  und gilt  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ , so nennt man  $\gamma$  Parametrisierung einer glatten Kurve.

**Satz 9.48** Sei  $I := [a, b]$  ein kompaktes Intervall und  $f \in C^0(I, \mathbb{R}^N)$  sei in  $(a, b)$  diff'bar. Dann gilt:

$$\left(\frac{2}{b-a}\right) |f(b) - f(a)| \leq \sup_{t \in (a,b)} |f'(t)|$$

**Definition 9.48** ((lokale) Extrema)

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $M$ . Wir sagen

- $f$  nimmt genau dann in  $\hat{x} \in M$  ihr Maximum an, wenn  $f(\hat{x}) \geq f(x)$  für alle  $x \in M$  gilt.
- $f$  nimmt genau dann in  $\hat{x} \in M$  ein lokales Maximum an, wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $\hat{x}$  gibt, so dass für alle  $x \in U$  gilt:  $f(\hat{x}) \geq f(x)$ .

Analog definieren wir (lokale) Minima.

**Satz 9.49** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diff'bar und  $\hat{x} \in \Omega$ . Besitzt  $f$  in  $\hat{x}$  ein lokales Extremum, so ist  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .

**Definition 9.50** (Fixpunkt)

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $\Phi : M \rightarrow M$  eine Abbildung von  $M$  in sich. Ein Element  $x \in M$  heißt Fixpunkt von  $\Phi$ , wenn  $\Phi(x) = x$  ist.

**Satz 9.51** (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei  $(M, d)$  ein vollständig metrischer Raum und  $\Phi : M \rightarrow M$  eine kontrahierende Abbildung von  $M$  in sich, d.h. mit einer Konstanten  $q \in (0, 1)$  gilt:

$$\forall x, y \in M \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

Dann besitzt  $\Phi$  genau einen Fixpunkt  $\hat{x}$ , und für jedes  $x_0 \in M$  konvergiert die durch  $x_{n+1} := \Phi(x_n)$  rekursiv gegebene Folge gegen  $\hat{x}$ . Des weiteren gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$d(\hat{x}, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

**Beweis.** (Skizze)

**1) Eindeutigkeit:** Nimm an es gäbe zwei Fixpunkte  $\hat{x}$  und  $\tilde{x}$  von  $\Phi$ , dann betrachte

$$d(\hat{x}, \tilde{x}) = d(\Phi(\hat{x}), \Phi(\tilde{x})) \leq q \cdot d(\hat{x}, \tilde{x})$$

und erhalte  $\hat{x} = \tilde{x}$ .

**2) Existenz:** Betrachte die im Satz definierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und zeige

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \cdot d(x_1, x_0)$$

per Induktion. Betrachte anschließend  $d(x_n, x_{n+m})$ . Mit der oben gezeigten Regel folgt, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist. Diese konvergiert, denn  $M$  ist ein vollständiger metrischer Raum. Nenne den Grenzwert  $\hat{x}$ . Betrachte nun

$$\Phi(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \hat{x}$$

**3. Abschätzung:** Betrachte den Grenzwert von  $d(\hat{x}, x_{n+m}) = 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und festes  $n$ . □

**Definition und Lemma 9.52** Sei  $\gamma \in C^0([0, 1], \mathbb{R}^N)$ , dann definieren wir

$$\int_0^1 \gamma(t) dt := \begin{pmatrix} \int_0^1 \gamma_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^1 \gamma_N(t) dt \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\left\| \int_0^1 \gamma(t) dt \right\| \leq \left( \int_0^1 \|\gamma(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Satz 9.53** (Satz von der Umkehrfunktion)

Sei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  mit einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Ist  $f'(\hat{x}) = J_f(\hat{x})$  für ein  $\hat{x} \in \Omega$  invertierbar (d.h.  $J_f(\hat{x}) \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$ ), so gibt es offene Umgebungen  $U$  von  $\hat{x}$  und  $V$  von  $\hat{y} := f(\hat{x})$  derart, dass  $U$  via  $f$  bijektiv auf  $V$  abgebildet wird und es gibt eine Funktion  $g : V \rightarrow U$  mit  $g \circ f|_U = \text{id}_U$  sowie  $f|_U \circ g = \text{id}_V$ . Weiter ist  $g$  diff'bar in  $\hat{y}$  mit  $g'(\hat{y}) = (J_f(\hat{x}))^{-1}$ .

**Beweis.** (Skizze)

Zunächst muss die Gleichung  $f(x) = y$  bei gegebenem  $y$  nahe bei  $\hat{y} := f(\hat{x})$  aufgelöst werden. Mit  $B := J_f(\hat{x})^{-1}$  ist diese Gleichung äquivalent zu

$$x = \Psi(x) \quad \text{mit } \Psi(x) := x - B(f(x) - y)$$

1. Zeige zunächst, dass es ein  $\rho_0 > 0$  gibt, so dass gilt

$$\forall_{0 < \rho < \rho_0} \forall_{x, z \in K_\rho(\hat{x})} \quad \|\Psi(x) - \Psi(z)\| \leq \frac{1}{2} \|x - z\|$$

2. Zeige nun, dass für  $y$  hinreichend nahe bei  $\hat{y}$   $\Psi$  die abgeschlossene Kugel um  $\hat{x}$  in sich abbildet, also dass  $\Psi(K_\rho(\hat{x})) \subseteq K_\rho(\hat{x})$  gilt. Und erhalte  $y \in U_\delta(2\|B\|)$  mit  $\delta := \frac{\rho}{2\|B\|}$ . Bezeichne nun  $F$  die Einschränkung von  $f$  auf  $K_\rho(\hat{x})$ , so ist

$$U := F^{-1}(U_\delta(\hat{y}))$$

eine offene Umgebung von  $\hat{x}$  und  $f$  bildet  $U$  bijektiv auf  $U_\delta(\hat{y})$  ab. 3. Für den Abstand von  $F^{-1}(y) =: x = x - B(f(x) - y)$  und  $F^{-1}(\hat{y}) =: \hat{x} = \hat{x} - B(f(\hat{x}) - \hat{y})$  berechne die Abschätzung

$$\|x - \hat{x}\| \leq 2 \cdot \|B\| \cdot \|y - \hat{y}\|$$

und erhalte die diff'barkeit von  $F^{-1}$  in  $\hat{y}$  durch

$$\begin{aligned} y - \hat{y} &= F(x) - F(\hat{x}) = J_f(\hat{x})(x - \hat{x}) + r(x - \hat{x}) \cdot \|x - \hat{x}\| \\ \Rightarrow F^{-1}(y) - F^{-1}(\hat{y}) &= x - \hat{x} = J_f(\hat{x})^{-1}(y - \hat{y}) + J_f(\hat{x})^{-1} \cdot r(x - \hat{x}) \cdot \|x - \hat{x}\| \end{aligned}$$

Mit der obigen Abschätzung strebt  $x$  gegen  $\hat{x}$ , wenn  $y$  gegen  $\hat{y}$  strebt, also geht auch der Restterm  $r(x - \hat{x})$  gegen Null.  $\square$

**Satz 9.56** Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  und  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und sei weiter  $\Phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$  ein Diffeomorphismus (d.h.  $\Phi$  ist eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.) von  $\Omega$  auf  $\Phi(\Omega) =: \Xi$ . Dann ist  $\Phi^{-1} \in C^k(\Xi, \mathbb{R}^N)$ .

**Beweis.** Da  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist gilt  $\Phi^{-1} \in C^1(\Xi, \mathbb{R}^N)$  und es gilt

$$(\Phi^{-1})' = (\Phi')^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

Per Induktionsannahme sei  $\Phi^{-1} \in C^{k-1}(\Xi, \mathbb{R}^N)$ , dann gilt sofort  $\Phi \in C^k(\Xi, \mathbb{R}^N)$ , denn  $(\Phi')^{-1} \circ \Phi^{-1}$  muss  $k-1$ -mal stetig diff'bar sein. Nach Induktionsannahme ist  $\Phi^{-1}$   $(k-1)$ -mal stetig diff'bar und nach Voraussetzung ist  $\Phi$   $k$ -mal stetig diff'bar. Dann ist  $(\Phi')^{-1}$   $k$ -mal stetig diff'bar.  $\square$

**Satz 9.57** (Satz von der impliziten Funktion)

Seien  $N, M \in \mathbb{N}$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$  eine offenen Teilmenge und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  mit  $f(\hat{x}, \hat{t}) = 0$  für  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Omega$  mit  $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$  und  $\hat{t} \in \mathbb{R}^M$ . Weiter besitze die die Abbildung  $f'(\hat{x}, \hat{t}) := J_f(\hat{x}, \hat{t})$  besitze Höchstrang  $N$ . Insbesondere sei

$$D_x f(\hat{x}, \hat{t}) := \left( \partial_1 f(\hat{x}, \hat{t}), \dots, \partial_N f(\hat{x}, \hat{t}) \right)$$

invertierbar (d.h.  $\det(D_x) \neq 0$ ). Dann gibt es Umgebungen  $X$  von  $\hat{x}$  und  $T$  von  $\hat{t}$  sowie eine Funktion  $g \in C^1(T, X)$  derart, dass gilt

$$\forall_{(x,t) \in X \times T} \quad f(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = g(t)$$

Ist mit  $k \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , so ist  $g \in C^k(T, \mathbb{R}^N)$

**Beweis.** (Skizze)

Definiere zunächst eine Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^{N+M} \\ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f(x, t) \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachte nun die Ableitung von  $\tilde{\phi}$

$$J_{\tilde{\phi}}(\hat{x}, \hat{t}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\hat{x}, \hat{t}) & \dots & \partial_N f(\hat{x}, \hat{t}) & \partial_{N+1} f(\hat{x}, \hat{t}) & \dots & \partial_{N+M} f(\hat{x}, \hat{t}) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x & D_t \\ 0 & \text{id}_M \end{pmatrix}$$

mit  $D_t := D_t f(\hat{x}, \hat{t}) := \left( \partial_{N+1} f(\hat{x}, \hat{t}), \dots, \partial_{N+M} f(\hat{x}, \hat{t}) \right)$  und  $D_x := D_x f(\hat{x}, \hat{t})$ . Die Ableitung ist Invertierbar

$$(J_{\tilde{\phi}}(\hat{x}, \hat{t}))^{-1} = \begin{pmatrix} D_x^{-1} & -D_x^{-1} D_t \\ 0 & \text{id}_M \end{pmatrix}$$

Wende nun den Satz von der Umkehrfunktion an, und erhalte Umgebungen  $U, V \subset \mathbb{R}^{N+M}$  von  $(\hat{x}, \hat{t})$  bzw. von  $(0, \hat{t})$ . Weiter gibt es Umgebungen  $X \subset \mathbb{R}^N$  von  $\hat{x}$  und  $\hat{T} \subset \mathbb{R}^M$  von  $\hat{t}$  mit  $X \times \hat{T} \subset U$  derart, dass  $X \times \hat{T}$  Diffeomorph via  $\tilde{\phi}|_U$  auf eine Umgebung  $\hat{V} \subset \mathbb{R}^M$  von  $(0, \hat{t})$  abgebildet wird. Mit der Projektion  $\pi: \mathbb{R}^{N+M} \rightarrow \mathbb{R}^M$  erhalte eine Umgebung  $T \subset \mathbb{R}^M$  derart, dass  $T \subset \hat{T} = \pi(\hat{V})$  und

$\{0\} \times T \subset \hat{V}$  gelten. Bezeichne  $\phi$  die Einschränkung von  $\tilde{\phi}$  auf  $X \times T$ , so gibt es eine einmal stetig diff'bare Umkehrabbildung  $\phi^{-1}$  und wir erhalten für  $(x, t) \in X \times T$ :

$$\begin{aligned} f(x, t) = 0 &\Leftrightarrow \phi(x, t) = (0, t) \Leftrightarrow (x, t) = \phi^{-1}(0, t) \\ &\Leftrightarrow x = p \circ \phi^{-1} \circ \iota(t) \end{aligned}$$

mit

$$\iota : \mathbb{R}^M \xrightarrow{t \mapsto (0, t)} \mathbb{R}^{N+M} \quad p : \mathbb{R}^{N+M} \xrightarrow{(x, t) \mapsto x} \mathbb{R}^N$$

Erhalte also  $g := p \circ \phi^{-1} \circ \iota$ . □

**Folgerung 9.58** *Mit den Bezeichnungen aus 9.57 ist für  $t \in T$*

$$g'(t) := J_g(t) = -\left(D_x f(g(t), t)\right)^{-1} D_t f(g(t), t)$$

## Begin der Vorlesung Analysis III

### 10 Extrema

#### Definition 10.1 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offenen Teilmenge und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Weiter sei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$  mit  $0 < M < N$  gegeben. Wir sagen: In  $\hat{x} \in \Omega$  liegt ein (lokales) Maximum von  $u$  unter der Nebenbedingung  $f(x) = 0$  vor, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1)  $f(\hat{x}) = 0$

(2)  $\exists U_\delta(\hat{x}) \subset \Omega \quad u(\hat{x}) \geq u(x)$  für alle  $x \in U_\delta(\hat{x})$  Analog definieren wir (lokale) Minima.

#### Definition und Satz 10.2 (Lagrange Multiplikatorenregel)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$  mit  $0 < M < N$  gegeben. Weiter sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diff'bar in einem Punkt  $\hat{x} \in \Omega$  und besitze dort ein Extremum unter der Nebenbedingung  $f(x) = 0$ . Dann sind die Vektoren  $\nabla u(\hat{x}), \nabla f_1(\hat{x}), \dots, \nabla f_M(\hat{x})$  linear abhängig. Sind insbesondere  $\nabla f_1(\hat{x}), \dots, \nabla f_M(\hat{x})$  linear unabhängig, so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\nabla u(\hat{x}) = \sum_{m=1}^M \lambda_m \cdot \nabla f_m(\hat{x})$$

Diese  $\lambda_m$  heißen die Lagrangeschen Multiplikatoren.

#### Beweis. (Skizze)

1. O.B.d.A. liege in  $\hat{x}$  ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung  $f(\hat{x}) = 0$  vor. Dann gelten (1) und (2) aus Def. 10.1. Betrachte die Ableitung von  $f$

$$J_f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} f_1(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_N} f_1(\hat{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} f_M(\hat{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_N} f_M(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

Da  $M < N$  suche nach  $M$ -Spalten, so dass die zugehörige  $M \times M$ -Matrix  $A(\hat{x})$  invertierbar ist.  $A(\hat{x})$  existiert, da nach Voraussetzung die Gradienten von  $f$  linear unabhängig sind.

2. Numeriere  $\hat{x}$  entsprechend um und setze  $\hat{x}' := (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M)$  und  $\hat{x}'' := (\hat{x}_{M+1}, \dots, \hat{x}_N)$ . Wende den Satz von der impliziten Funktion an und erhalte Umgebungen  $X'$  von  $\hat{x}'$  und  $X''$  von  $\hat{x}''$  sowie eine Funktion  $g \in C^1(X'', \mathbb{R}^M)$  mit

$$f(g(\hat{x}''), \hat{x}'') = 0$$

3. Definiere  $v := u \circ \phi$  mit

$$\begin{aligned} \phi : X'' &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ x'' &\mapsto (g(x''), x'') \end{aligned}$$

Es gilt:  $v$  hat in  $\hat{x}''$  eine (lokale) Maximalstelle und ist diff'bar in  $\hat{x}''$  also ist

$$0 = \nabla v(\hat{x}'') = (\phi')^T(\hat{x}'') \cdot \nabla u(\hat{x}) = 0$$

Betrachte die Ableitung von  $\phi$

$$\phi'(\hat{x}'') := J_\phi(\hat{x}'') = \begin{pmatrix} \partial_{M+1} g(\hat{x}'') & \dots & \partial_{M+K} g(\hat{x}'') \\ e''_{M+1} & \dots & e''_{M+K} \end{pmatrix}$$

mit  $K = N - M$  und  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^N$ . Es gilt

$$\nabla v(\hat{x}'') = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \partial_{M+i} g(\hat{x}'') \\ e''_{M+i} \end{pmatrix}, \nabla u(\hat{x}) \right\rangle = 0 \quad \forall_{i=1 \dots K}$$

Daher ist  $\nabla u(\hat{x}) \in T^\perp$  mit  $T^\perp := \text{span}\{a_i | i = 1 \dots K\}$  und  $\dim(T^\perp) = N - K = M$ .

4. Da die Wahl von  $g$  nicht kanonisch ist finde basis von  $T^\perp$  unabhängig von  $g$ . Es gilt:

$$\dim \left( \text{span}\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_M(x)\} \right) = M = \dim(T^\perp)$$

Da nach Vor. alle Gradienten linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von  $T^\perp$ , damit folgt die Behauptung.  $\square$

### Satz 10.3 (Spektralsatz)

Jede reelle, symmetrische  $N \times N$ -Matrix  $A$  besitzt ein vollständiges Orthogonalsystem  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$  von Eigenvektoren zu Eigenwerten  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  von  $A$ . Diese sind die einzigen Eigenwerte von  $A$ .

**Beweis.** (Idee)

Definiere

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, Ax \rangle \end{aligned}$$

und suche für  $k = 1 \dots N$  die Maxima unter den Nebenbedingungen

$$f_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{i=2 \dots k} f_i(x) = \langle x, x^{(i-1)} \rangle = 0$$

mit  $x^{(i)}$  sind die zuvor gefundenen Maximalstellen und  $\lambda_i$  die Lagrangeschen Multiplikatoren.

## 11 Der Satz von Taylor

**Lemma 11.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Teilmenge und  $f \in C^1(\Omega)$  eine Funktion auf  $\Omega$ . Weiter existiere  $\partial_1 \partial_2 f$  in  $\Omega$  und sei stetig, dann existiert auch  $\partial_2 \partial_1 f$  in  $\Omega$  und beide sind einander gleich.

**Beweis.** (Skizze)

**Idee:** Zeige die Existenz von  $\partial_2 \partial_1 f$  und die Gleichheit mit  $\partial_1 \partial_2 f$  in einem beliebigen Punkt von  $\Omega$ . O.B.d.A. sei dies  $x := (0, 0) \in \Omega$ .

1. Wähle  $\delta$  hinreichend klein, so dass  $[-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta] \subset \Omega$  gilt. Betrachte nun

$$A := \frac{1}{hk} \left( f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) \right) \quad \text{mit } h, k \in (-\delta, \delta)$$

und erhalte

$$\frac{1}{k} \cdot \int_0^k \frac{1}{h} [\partial_2 f(h, s) - \partial_2 f(0, s)] ds = A = \frac{1}{k} \cdot [\partial_1 f(\theta h, k) - \partial_1 f(\theta h, 0)] \quad \text{mit } \theta := \theta(h, k) \in (0, 1)$$

2. Betrachte den Grenzwert für  $h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{k} \cdot \int_0^k \partial_1 \partial_2 f(0, s) ds = \frac{1}{k} \cdot [\partial_1 f(0, k) - \partial_1 f(0, 0)]$$

Durch den Grenzübergang von  $k \rightarrow 0$  folgt die Aussage für den Punkt  $(0, 0) \in \Omega$   $\square$

**Definition 11.2** (Multiindex)

Ein Multiindex  $\alpha$  der Länge  $N$  ist ein Element von  $\mathbb{N}_0^N$ , also ein Vektor des  $\mathbb{R}^N$  mit ganzzahligen, nicht negativen Komponenten. Für  $x \in \mathbb{R}^N$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$  definieren wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N} = \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$$

Analog definieren wir  $\partial^\alpha$ . Die Ordnung von  $\alpha$  definieren wir durch

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

Die Fakultät von  $\alpha$  definieren wir als

$$\alpha! := \prod_{i=1}^N (\alpha_i!)$$

Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$  definieren wir weiter

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta &: \Leftrightarrow \forall_{i=1 \dots N} \alpha_i \leq \beta_i \\ \alpha < \beta &: \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ und } \exists_{i \in \{1, \dots, N\}} \alpha_i < \beta_i \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ und } |\alpha| < |\beta| \end{aligned}$$

Falls  $\alpha \leq \beta$  definieren wir

$$\binom{\beta}{\alpha} := \frac{\beta!}{\alpha! \cdot (\beta - \alpha)!} = \prod_{i=1}^N \binom{\beta_i}{\alpha_i}$$

Dabei sind die Summe und die Differenz von  $\alpha, \beta$  wie in  $\mathbb{R}^N$  erklärt, es ist jedoch klar, dass  $\alpha - \beta$  nur für  $\beta \leq \alpha$  ein Multiindex ist.

**Satz 11.3** (Polynomische Formel)

Für alle  $p \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^N$  gilt

$$\left( \sum_{n=1}^N x_n \right)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

**Beweis.** Induktiv über die Dimension  $N$ . Hierbei ist der Induktionsanfang  $N = 1$  trivial. Für den Schluss von  $N$  auf  $N + 1$  betrachte

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{N+1} x_n \right)^p &= \left( x_{N+1} + \sum_{n=1}^N x_n \right)^p \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot \left( \sum_{n=1}^N x_n \right)^q \cdot (x_{N+1})^{p-q} =: R \end{aligned}$$

mit  $\beta \in \mathbb{N}_0^N$  und  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  mit  $(\hat{x}, x_{N+1}) = x$  gilt dann nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} R &= \sum_{q=0}^p \frac{p!}{(p-q)! \cdot q!} \left( \sum_{|\beta|=q} \frac{q!}{\beta!} \hat{x}^\beta \right) (x_{N+1})^{p-q} \\ &= \sum_{q=0}^p \sum_{|\beta|=q} \frac{p!}{(p-q)! \cdot \beta!} \hat{x}^\beta (x_{N+1})^{p-q} \end{aligned}$$

Fasse nun  $\beta$  und  $(p - q)$  zusammen zu  $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+1}$ , dann gilt  $|\alpha| = p$  und es folgt die Behauptung  $\square$

**Definition 11.4** (*k-mal stetig diff'bar*)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Menge und  $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^M)$  sowie  $k \in \mathbb{N}$ . Wir nennen  $u$  *k-mal stetig diff'bar*, wenn sämtliche partiellen Ableitung von  $u$  bis zur Ordnung  $k$  existieren und stetige Funktionen auf  $\Omega$  sind. Wir schreiben dann

$$u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^M)$$

**Satz 11.5** Seien  $\Omega, N, M, u$  wie in Definition 11.4 gegeben. Weiter möge  $\partial^\alpha u$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$  mit  $|\alpha| \leq p$  in  $\Omega$  existieren. Dann ist  $u \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$  und alle partiellen Ableitungen der selben Ordnung sind einander gleich.

**Beweis.** (Idee)

Verwende Lemma 10.1 um die Differentiationsreihenfolge sukzessive zu vertauschen.

**Definition und Satz 11.6** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Menge und für  $p \in \mathbb{N}$  sei  $f \in C^p(\Omega)$ . Ferner sei  $\hat{x} \in \Omega$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $P$  im  $\mathbb{R}^N$  der mit Grad  $\deg(P) \leq p$  und der Eigenschaft:

$$\forall_{|\alpha| \leq p} \quad \partial^\alpha P(\hat{x}) = \partial^\alpha f(\hat{x})$$

Dieses Polynom ist gegeben durch

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \left( \partial^\alpha f(\hat{x}) \right) (x - \hat{x})^\alpha$$

Dieses Polynom heißt *p-tes Taylorpolynom* von  $f$  in  $\hat{x}$ .

**Beweis.** Setze

$$P(x) := \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (x - \hat{x})^\alpha$$

Bilde nun  $\partial^\beta P(\hat{x}) = a_\alpha \cdot \alpha!$  und wähle  $a_\alpha$  so, dass  $a_\alpha \cdot \alpha! = \partial^\beta f(\hat{x})$  also

$$a_\alpha := \frac{1}{\alpha!} \partial^\beta f(\hat{x})$$

$\square$

**Lemma 11.7** Mit einem  $\rho > 0$  sei  $U := U_\rho(0)$ . Dann gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^m(U)$  sowie für alle  $x \in U$  und  $t \in (-1, 1)$  die Formel

$$f_x^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \cdot (\partial^\alpha f(tx)) \cdot x^\alpha$$

**Beweis.** (Skizze)

Zeige zunächst per Induktion, dass mit von  $f$  unabhängigen Konstanten  $a_\alpha$  für alle  $t \in (-1, 1)$  gilt:

$$f_x^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha f(tx) x^\alpha$$

Bestimme nun die  $a_\alpha$  durch Berechnung dieser für geeignete Funktionen. Setze  $p(x) := x^\alpha$  mit  $|\alpha| = m$  und betrachte

$$p_x(t) = x^\alpha t^m \quad \text{also } p_x^{(m)}(t) = m! \cdot x^\alpha$$

sowie für  $|\beta| = m$

$$\partial^\beta p(x) = \begin{cases} \alpha! & \text{falls } \beta = \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist für jedes  $x \in U$  und für alle  $t \in (-1, 1)$  folgende Gleichung richtig:

$$m! \cdot x^\alpha = p_x^{(m)}(t) = \sum_{|\beta|=m} a_\alpha \cdot (\partial^\beta p(tx)) \cdot x^\beta = a_\alpha \cdot \alpha! \cdot x^\alpha$$

□

Ist nun  $f \in C^{m+1}(U_\rho(0))$  so liefert der Satz von Taylor aus dem vergangenen Semester (mit Lagrangeschem Restglied) für  $x \in U_\rho(0)$  und einem  $t \in (0, 1)$  die folgende Gleichung

$$f(x) = f_x(1) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} f_x^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} f_x^{(m+1)}(t)$$

Mit Lemma 11.7 und einem  $t \in (0, 1)$  folgt nun

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^m \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(0)) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha} (\partial^\alpha f(tx)) \cdot x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(0)) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha} (\partial^\alpha f(tx)) \cdot x^\alpha \end{aligned}$$

Es ergibt sich der folgende

**Satz 11.8** (Satz von Taylor)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $m$  eine natürliche Zahl. Weiter sei  $f$  eine  $(m+1)$ -mal stetig diff'bare Funktion auf  $\Omega$ . Sind  $\hat{x}, x \in \Omega$  derart, dass die Strecke  $\{tx + (1-t)\hat{x} \mid t \in [0, 1]\}$  ganz in  $\Omega$  liegt, so gibt es ein  $t \in (0, 1)$  derart, dass gilt:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f(0)) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha} (\partial^\alpha f(tx)) \cdot x^\alpha$$

**Definition und Satz 11.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen und  $f \in C^2(\Omega)$ , dann definieren wir für  $x \in \Omega$

$$f''(x) = H_f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{0 < i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \partial_2 \partial_1 f(x) \\ \partial_1 \partial_2 f(x) & \partial_2 \partial_2 f(x) \end{pmatrix}$$

die Hessematrix von  $f$ . Die Hessematrix ist symmetrisch. Sei nun  $\hat{x} \in \Omega$  ein kritischer Punkt von  $f$ , also gelte  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ , dann liegt in  $\hat{x}$  ein lokales Minimum (Maximum) vor, wenn  $H_f(\hat{x})$  positiv (negativ) definit ist. Eine symmetrische Matrix  $A \in \text{Mat}(n, n)$  heißt positiv (negativ) definit, wenn eine Konstante  $\gamma > 0$  existiert mit

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad \langle A\zeta, \zeta \rangle \geq \gamma \|\zeta\|^2 \quad \left( \langle A\zeta, \zeta \rangle \leq -\gamma \|\zeta\|^2 \right)$$

**Beweis.** Betrachte das zweite Taylorpolynom von  $f$

$$\begin{aligned} T_{2,f}(x) &= f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^N \partial_j f(\hat{x}) \cdot (x_j - \hat{x}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\partial_i \partial_j f)(\hat{x}) \cdot (x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) \\ &= f(\hat{x}) + \langle \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\hat{x})(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei die Hessematrix  $H_f(\hat{x})$  positiv definit, dann gilt mit  $\gamma > 0$  aus der Definition und einem  $\delta > 0$  für alle  $x \in U_\delta(0) \subset \Omega$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2} \langle H_f(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \left( H_f(\hat{x} + t(x - \hat{x})) \right) \\ &\geq f(\hat{x}) + \frac{\gamma}{2} \cdot \|x - \hat{x}\|^2 - \frac{1}{2} \|H_f(\hat{x} + t(x - \hat{x})) - H_f(\hat{x})\| \cdot \|x - \hat{x}\|^2 \end{aligned}$$

Ist  $\delta$  hinreichend klein, so gilt für  $y \in U_\delta(\hat{x})$  die Abschätzung

$$\|H_f(y) - H_f(\hat{x})\| \leq \frac{\gamma}{2}$$

Und somit für alle  $\hat{x} \neq x \in U_\delta(\hat{x})$

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \frac{\gamma}{4} \cdot \|x - \hat{x}\|^2 > f(\hat{x})$$

Es liegt also in  $\hat{x}$  ein lokales Minimum von  $f$  vor. □

**Satz 11.10** Eine symmetrische Matrix  $A \in \text{Mat}(n, n)$  ist genau dann positiv (bzw negativ) definit, wenn ihre sämtlichen Eigenwerte positiv (bzw negativ) sind.

**Beweis.** (Idee)

Verwende die Funktion aus dem Beweis von Satz 10.3 (Spektralsatz)

**Bemerkung** (Kriterium für positive/negative Definitheit)

Eine symmetrische Matrix  $A \in \text{Mat}(n, n)$  ist genau dann

- positiv definit, wenn die Determinanten aller Untermatrizen positiv sind.
- negativ definit, wenn  $a_{1,1} < 0$  ist und die Unterdeterminanten alternierende Vorzeichen haben

**Satz 11.11** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $f \in C^2(\Omega)$  eine Funktion mit kritischem Punkt  $\hat{x} \in \Omega$ . Dann gelten

1. Ist  $H_f(\hat{x})$  positiv definit, so hat  $f$  in  $\hat{x}$  ein lokales Minimum
2. Ist  $H_f(\hat{x})$  negativ definit, so hat  $f$  in  $\hat{x}$  ein lokales Maximum
3. Besitzt  $H_f(\hat{x})$  sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, so hat  $f$  in  $\hat{x}$  einen Sattelpunkt, d.h. es gibt zwei orthogonale Graden durch  $\hat{x}$  derart, dass  $f$  längs der einen in  $\hat{x}$  minimal und längs der anderen in  $\hat{x}$  maximal wird.

**Beweis.** 1. und 2. bereits in Satz 11.9 bewiesen. Zum Nachweis von 3. nimm an, dass  $-\lambda$  und  $\mu$  für  $\lambda, \mu > 0$ , Eigenwerte von  $H_f(\hat{x})$  seien. Hierzu seien  $u, v$  normierte, orthogonalisierte Eigenvektoren. Mit Satz 11.8 und  $x := \hat{x} + su$  und  $|s|$  genügend klein erhält man

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + su) &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2}s^2 \cdot \langle H_f(\hat{x})u, u \rangle + \frac{1}{2}s^2 \cdot \langle (H_f(\hat{x} + tu) - H_f(\hat{x}))u, u \rangle \\ &= f(\hat{x}) - \frac{1}{2}\lambda s^2 \cdot \|u\|^2 + \frac{1}{2}s^2 \cdot \|H_f(\hat{x} + tu) - H_f(\hat{x})\| \cdot \|u\|^2 \\ &\leq f(\hat{x}) - \frac{1}{4}\lambda s^2 < f(\hat{x}) \quad \text{falls } s \neq 0 \end{aligned}$$

sofern  $|s|$  so klein ist, dass für  $|t| \leq |s|$  gilt

$$\|H_f(\hat{x} + tu) - H_f(\hat{x})\| < \frac{\lambda}{2}$$

Analog erhalten wir für kleines  $|s| \neq 0$

$$f(\hat{x} + sv) \geq f(\hat{x}) + \frac{1}{4}\mu s^2 > f(\hat{x})$$

□

## 12 $K$ -Flächen im $\mathbb{R}^N$

### Definition 12.1 (Überdeckung)

Sei  $K$  eine Teilmenge eines metrischen Raums  $(M, d)$ . Unter einer offenen Überdeckung von  $K$  verstehen wir eine Familie  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  offener Mengen mit

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

Hier ist  $\Lambda$  eine Indexmenge. Eine endliche Teilüberdeckung von  $K$  ist eine endliche Teilfamilie

$$\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_L}\} = \{O_{\lambda_l} \mid 1 < l < L \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_L \in \Lambda\}$$

die  $K$  bereits überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{l=1}^L O_{\lambda_l}$$

### Satz 12.2 (Heine-Borellscher Überdeckungssatz)

Eine Teilmenge  $K$  eines metrischen Raums  $(M, d)$  ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung enthält. D.h. in metrischen Räumen sind Folgen- und Überdeckungskompaktheit äquivalent.

**Beweis.** Zeige zunächst: Überdeckungskompaktheit impliziert Folgenkompaktheit.

Sei also  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K$  derart, dass  $F := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine unendliche Menge ist. Zeige  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  enthält eine Teilfolge, die gegen ein Element aus  $K$  konvergiert. Wenn  $F$  keinen Häufungspunkt in  $K$  besitzt, so gibt es zu jedem  $x \in K$  eine offene Umgebung  $U_x$  derart, dass  $U_x \cap F$  endlich ist.

$$(U_x)_{x \in K}$$

ist eine offene Überdeckung von  $K$  und enthält nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung  $(U_{x_l})_{l=1, \dots, L}$ . Damit ist aber

$$F = \bigcup_{l=1}^L (U_{x_l} \cap F)$$

endlich. Dies ist ein Widerspruch.

Zeige nun: Folgenkompaktheit impliziert Überdeckungskompaktheit.

Sei  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine offene Überdeckung von  $K$ , dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  so dass es für alle  $x \in K$  ein  $\lambda \in \Lambda$  gibt, so dass

$$U_\varepsilon(x) \subset O_\lambda \quad \text{mit } U_\varepsilon(x) := \{z \in M \mid d(x, z) < \varepsilon\}$$

Nimm nun an,  $K$  sei Folgen- aber nicht Überdeckungskompakt und betrachte  $(U_\varepsilon(x))_{x \in K}$  als Folge sowie eine offene Überdeckung  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ohne endliche Teilüberdeckung von  $K$  mit  $\varepsilon > 0$  wie oben.

Die Familie  $(U_\varepsilon(x))_{x \in K}$  bildet eine offene Überdeckung von  $K$ . Gäbe es nun eine endliche Teilüberdeckung  $(U_\varepsilon(x_i))_{i=1, \dots, n}$  von  $K$  so gäbe es auch eine endliche Teilüberdeckung von  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von  $K$ . Wähle  $x_1 \in K$  beliebig, dann ist  $K \not\subset U_\varepsilon(x_1)$  wähle also  $x_2 \in K \setminus U_\varepsilon(x_1)$ . Dann ist  $K \not\subset U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2)$  und nach  $n$ -Schritten gibt es ein

$$x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$$

Für jedes Glied dieser Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_\varepsilon(x_i)$$

Diese Folge enthält keine konvergente Teilfolge, denn für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n > m$  gilt:

$x_n \notin U_\varepsilon(x_m)$  Also ist  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ . Dann ist  $K$  aber nicht Folgenkompakt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.  $\square$

**Folgerung 12.3** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subset M$  eine kompakte und  $V \subset M$  eine offene Teilmenge mit  $K \subset V$ . Dann gibt es eine beschränkte offene Menge  $U \subset M$  mit

$$K \subset U \subset \bar{U} \subset V \quad \text{mit } \bar{U} := U \cup \partial U$$

**Beweis.** Es gilt: Ist  $U$  beschränkt, so ist  $\bar{U}$  beschränkt.

Zu jedem  $x \in K$  gibt es eine offene Kugel  $B_x$  um  $x$ , die in  $V$  enthalten ist. Sei nun  $B'_x$  die offene Kugel um  $x$  mit halbem Radius und  $\bar{B}'_x$  sei der Abschluss von  $B'_x$ . Dann gibt es endlich viele Punkte  $x_i$ , so dass

$$K \subset \bigcup_{n=1}^N B'_{x_n} \subset \bigcup_{x \in K} B'_x$$

und die  $(B'_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$  bilden eine endliche Teilüberdeckung von  $K$ . Setze nun

$$U := \bigcup_{n=1}^N B'_{x_n}$$

Dann ist  $K \subset U$  und  $U$  ist offen. Weiter ist

$$U = \bigcup_{n=1}^N B'_{x_n} \subset \bigcup_{n=1}^N \bar{B}'_{x_n} = \bar{U}$$

und  $\bar{U}$  ist abgeschlossen.  $\square$

**Definition 12.4** ((Parameter-) Gebiet)

Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^N$  ist eine offene zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$ .

Ein Parametergebiet im  $\mathbb{R}^N$  ist ein beschränktes Gebiet  $P \subset \mathbb{R}^N$  mit  $\partial P \subset \partial \bar{P}$ , d.h. jeder Randpunkt von  $P$  ist auch ein Randpunkt von  $\bar{P}$ .

**Lemma 12.5** Sei  $P \subset \mathbb{R}^K$  ein Parametergebiet, dann gelten

(i) Jeder innere Punkt von  $\bar{P}$  gehört zu  $P$ .

(ii) Jeder Punkt von  $\partial P$  ist Häufungspunkt von  $\mathbb{R}^K \setminus \bar{P}$ .

**Beweis.** Zu (i): Sei  $x_0 \in \text{int}(\bar{P})$  ein innerer Punkt von  $\bar{P}$ . Falls  $x_0 \notin P$  ist, so ist  $x_0 \in \bar{P} \setminus P = \partial P$ . Also liegen in jeder Umgebung von  $x_0$  Punkte aus  $\mathbb{R}^K \setminus \bar{P}$  und damit ist  $x_0$  kein innerer Punkt von  $\bar{P}$ . Widerspruch.

Zu (ii): Sei  $x \in \partial P$ , dann ist  $x \in \bar{P}$  und  $x \in \partial \bar{P}$ . In jeder Umgebung von  $x$  liegen Punkte aus  $\mathbb{R}^K \setminus \bar{P}$ . Diese sind wegen  $x \in \bar{P}$  von  $x$  verschieden.  $\square$

**Definition 12.6** (parametrisiertes  $K$ -Flächenstück)

Seien  $N, K \in \mathbb{N}$  mit  $K < N$  und  $P$  ein parametergebiet im  $\mathbb{R}^K$ . Ein parametrisiertes  $K$ -Flächenstück über  $P$  ist ein  $\varphi \in C^1(P, \mathbb{R}^N)$  mit den Eigenschaften

1.  $\varphi$  ist injektiv
2. Für alle  $a \in P$  gilt:  $\text{rg}(J_\varphi(a)) = K$
3.  $\varphi^{-1} : \text{Im}(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^K$  ist stetig

**Definition 12.7** ( $K$ -Fläche)

Seien  $N, K \in \mathbb{N}$  mit  $0 < K < N$ . Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^N$  heißt  $K$ -Fläche, wenn es zu jedem  $x^0 \in M$  eine  $\mathbb{R}^N$ -Umgebung  $U$  von  $x^0$ , ein Parametergebiet  $P$  so wie ein parametrisiertes  $K$ -Flächenstück  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $\varphi(P) = M \cap U$  gibt.

**Satz 12.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Menge und  $M \subset \Omega$  eine Teilmenge. Gibt es für  $0 < L < N$  ein  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^L)$  mit

1.  $M := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$
2.  $\text{rg}(J_f(x)) = L$  für  $x \in \Omega$

Dann ist  $M$  eine  $(N - L)$ -Fläche.

Beachte:  $\text{rg}(J_f(x)) = L \Leftrightarrow \{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_L(x)\}$  linear unabhängig sind.

**Beweis.** Fixiere  $\hat{x} \in M$ . Es gilt  $J_f(\hat{x})$  besteht aus  $L$  Zeilen und  $N$  Spalten. Da der Rang der Jacobi-matrix gleich  $L$  ist, existiert eine reguläre  $L \times L$ -Untermatrix. Nach geeigneter Umsortierung kann angenommen werden, dass die ersten  $L$  Spalten linear unabhängig sind.  $\square$

**Generalvoraussetzungen**

- $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$     $K \in \{1, \dots, N - 1\}$     $M := N - K$
- $F \subset \mathbb{R}^N$
- $U \subset \mathbb{R}^N$  ist eine Umgebung von  $p \in \mathbb{R}^N$ , wenn  $p \in U$  und  $U$  offen ist.

**Definition 12.9 i)** ( $K$ -Nullfläche)

Wir nennen  $F$  eine  $K$ -Nullfläche, wenn es zu jedem  $p \in F$  eine Umgebung  $V$  von  $p$  und ein  $\psi \in C^1(V, \mathbb{R}^M)$  derart gibt, dass gelten

- (a)  $V \cap F = \{x \mid \psi(x) = 0\}$       (b)  $J_\psi(x)$  hat für alle  $x \in V$  Höchststrang  $M$

**Definition 12.9 ii)** ( $K$ -Bildfläche)

Wir nennen  $F$  eine  $K$ -Bildfläche, wenn es zu jedem  $p \in F$  eine „Karte“ gibt, d.h. ein  $(U, V, \varphi)$  mit

- $U \subset \mathbb{R}^K$  ist offen
- $V$  ist eine Umgebung von  $p$
- $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$

so dass gelten

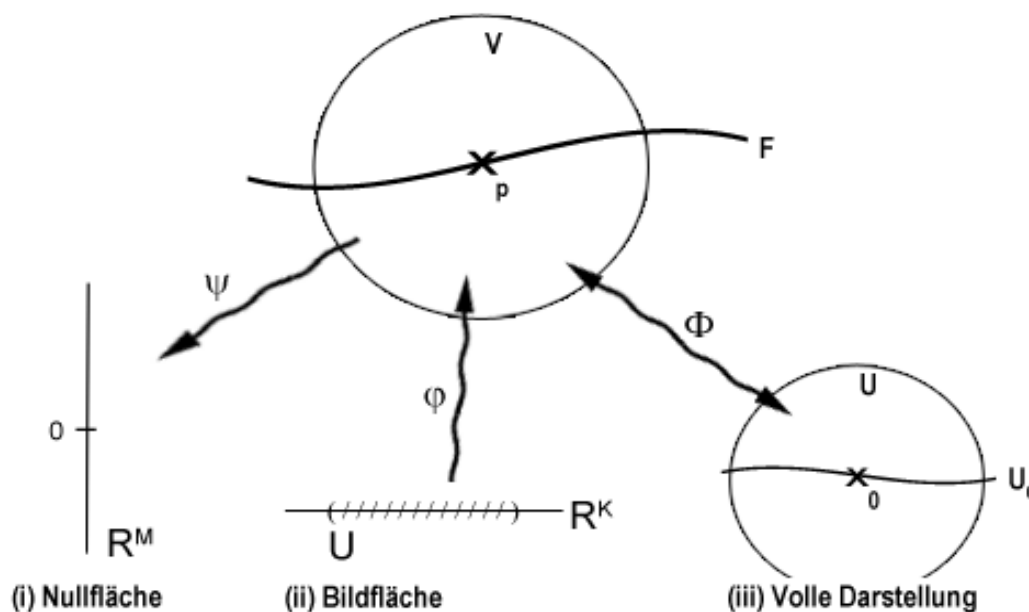
- (a)  $V \cap F = \varphi(U)$   
 (b)  $J_\varphi(u)$  hat für alle  $u \in U$  den Höchststrang  $K$   
 (c)  $\varphi : U \rightarrow V \cap F$  ist ein Homöomorphismus, d.h. bijektiv und in beiden Richtungen stetig.

**Definition 12.9 iii)** ( $K$ -Fläche)

Wir nennen  $F$  eine  $K$ -Fläche, wenn es zu jedem  $p \in F$  Umgebungen  $V$  und  $U$  von  $p$  bzw.  $0$  und einen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  gibt mit

- (a)  $V \cap F = \Phi(U_0)$     mit  $U_0 := \{u \in U \mid u_{k+1} = \dots = u_N = 0\}$   
 (b)  $p = \Phi(0)$

### Verbildlichung der Definition 12.9



**Satz 12.10** Die Darstellungen (i) - (iii) aus Definition 12.9 sind äquivalent.

**Beweis.** (Idee)

Diesen Satz beweisen wir in drei Schritten:

(1)  $F$  ist  $K$ -Fläche  $\Rightarrow F$  ist  $K$ -Nullfläche und  $F$  ist  $K$ -Bildfläche.

(2)  $F$  ist  $K$ -Nullfläche  $\Rightarrow F$  ist  $K$ -Fläche.

(3)  $F$  ist  $K$ -Bildfläche  $\Rightarrow F$  ist  $K$ -Fläche.

Hierbei ist (1) leicht durch Untersuchen von Komponenten von  $\Phi^{-1} := \Psi$  und  $\Phi$  zu sehen. Für (2) und (3) benutze den Satz von der Umkehrfunktion.

**Beweis.** (Skizze)

Zu (1) sei  $\Phi : U \rightarrow V$  der  $C^1$ -Diffeo aus (iii) und  $\Psi := \Phi^{-1} : V \rightarrow U$ , dann hat

$$\begin{aligned} \psi : V &\rightarrow \mathbb{R}^M \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \Psi_{K+1}(x) \\ \vdots \\ \Psi_{K+M}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die in (i) ( $K$ -Nullfläche) geforderten Eigenschaften. Zur Darstellung als  $K$ -Bildfläche (ii) definiere

$$\tilde{U} := \left\{ u \in \mathbb{R}^K \mid \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in U \right\}$$

dann ist  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^K$  offen und

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ u &\mapsto \Phi(u, 0) \end{aligned}$$

erfüllt die in (ii) geforderten Eigenschaften.

Zu (2): Ist  $F$  eine  $K$ -Nullfläche nach (i), dann gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$  und eine Funktion  $\psi \in C^1(C, \mathbb{R}^M)$  mit den in (i) beschriebenen Eigenschaften. Insbesondere sind die Gradienten der Komponenten von  $\psi$  linear unabhängig. Ergänze diese Vektoren durch  $\{b^1, \dots, b^K\}$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^N$  und definiere

$$\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \langle b^1, x - p \rangle \\ \vdots \\ \langle b^K, x - p \rangle \\ \dots \\ \psi(x) \end{pmatrix}$$

Für  $k = 1 \dots K$  gilt dann  $\nabla \Psi_k(x) = b^k$  und für  $m = 1 \dots M$  gilt  $\nabla \Psi_{K+m}(x) = \nabla \psi_m(x)$  diese Vektoren sind für  $x = p$  nach Konstruktion linear unabhängig, daher gilt  $\det(J_\Psi(p)) \neq 0$  Nach dem Satz von der Umkehrfunktion ist dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit (sonst verkleinere  $V$ )  $\Psi$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus auf  $U := \Psi(V)$  und  $\Phi := \Psi^{-1}$  hat die in (iii) geforderten Eigenschaften.

Zu (3): Seien  $V_1$  eine Umgebung von  $p \in F$  und  $U_1 \subset \mathbb{R}^K$  eine offene Teilmenge sowie  $\varphi \in C^1(U_1, \mathbb{R}^N)$  mit den Eigenschaften (a)  $V_1 \cap F = \varphi(U_1)$ , (b)  $\partial_i \varphi(u)$  sind für  $i = 1 \dots K$  und  $u \in U_1$  linear unabhängig und (c)  $\varphi : U_1 \rightarrow V_1 \cap F$  ist Homöomorph, gegeben. Es kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass  $0 \in U_1$  liegt und  $\varphi(0) = p$  ist. Dann sind insbesondere  $\partial_i \varphi(0)$  sind für  $i = 1 \dots K$  linear unabhängig und können mit  $b^1, \dots, b^M$  zu einer Basis des  $\mathbb{R}^N$  ergänzt werden. Definiere

$$\Phi_1 : U_1 \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(u, s) \mapsto \varphi(u) + \sum_{m=1}^M s_m \cdot b^m$$

Dann ist  $\Phi_1$  einmal stetig diff'bar und die Determinante der Jakobimatrix von  $\Phi_1$  ist im Punkte  $(0, 0)$  nicht 0. Wende nun den Satz von der Umkehrfunktion an und erhalte eine Umgebung  $U_2$  von  $0$  und  $\delta > 0$  derart, dass

$$\Phi_2 := \Phi_1|_{U_2 \times U_{\mathbb{R}^M}(0, \delta)}$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus auf  $V_2 := \Phi_2(U_2 \times U_{\mathbb{R}^M}(0, \delta))$  ist. Wegen (c) gibt es nun eine Umgebung  $V_3$  von  $p$  so dass mit  $U_3 := \varphi^{-1}(F \cap V_3)$  und  $\tilde{\varphi} := \varphi|_{U_3}$  weiterhin (a), (b) und (c) gelten. Insbesondere können also Elemente aus  $V_3$  als  $\tilde{\varphi}(u)$  dargestellt werden, wenn sie Elemente von  $F$  sind. Wähle nun  $\rho > 0$  so, dass für  $U := U_{\mathbb{R}^N}(0, \rho)$  und  $\Phi := \Phi_2|_U$  gilt:

$$V := \Phi(U) \subset V_2 \cap V_3$$

Dann ist  $\Phi$  ein  $C^1$ -Diffeo, der die in (iii) geforderten Eigenschaften erfüllt. □

**Satz 12.11** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Dann ist der Graph von  $f$

$$G_f := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ f(u) \end{pmatrix} \mid u \in \Omega \right\}$$

eine  $N$  Fläche im  $\mathbb{R}^{N+1}$

**Beweis.** Für  $u \in \Omega$  liefert die Definition

$$\varphi(u) := \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ f(u) \end{pmatrix}$$

eine  $C^1$ -Funktion von  $\Omega$  in den  $\mathbb{R}^{N+1}$  und es gilt

$$\partial_m \varphi(u) = \begin{pmatrix} e_n^m \\ \dots \\ \partial_m f(u) \end{pmatrix}$$

mit  $e_n$  sind die Einheitsvektoren im  $\mathbb{R}^N$ . Diese Vektoren sind linear unabhängig im  $\mathbb{R}^{N+1}$ , da schon die  $e_n$  unabhängig im  $\mathbb{R}^N$  sind. Weiter ist  $\varphi$  injektiv und es gilt

$$\begin{pmatrix} u^k \\ \dots \\ f(u^k) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ f(u) \end{pmatrix} \Rightarrow u^k \rightarrow u$$

daher ist die Umkehrfunktion von  $\varphi$  stetig also ein Homöomorphismus. Daher folgt die Behauptung aus Definition 12.9 (ii)  $\square$

**Definition und Satz 12.12** (Normal- und Tangentialraum)

Sei  $F$  eine  $K$ -Fläche und  $p \in F$  sowie

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^M \quad \text{und} \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$$

seien Darstellungen von  $F$  als Null- bzw. Bildfläche. Aus der Darstellung als  $K$ -Nullfläche erhalte den Normalraum an  $F$  mit

$$N_p F = \text{span}\{\nabla \psi_i | i = 1 \dots M\}$$

und aus der Darstellung als  $K$ -Bildfläche erhalte den Tangentialraum an  $F$  mit

$$T_p F = \text{span}\{\partial_i \varphi_i | i = 1 \dots K\}$$

Diese Räume sind geometrische Größen, d.h. unabhängig von den gewählten Darstellungen. Und es gelten

$$T_p F + N_p F = \mathbb{R}^N \quad \text{und} \quad T_p F \perp N_p F \quad \text{kurz: } T_p F = (N_p F)^\perp$$

**Beweis.** Es gelten

$$\begin{aligned} \psi_m \circ \varphi(u) &= 0 \\ \partial_k (\psi_m \circ \varphi)(u) &= \sum_{n=1}^N \partial_n \psi_m(\varphi(u)) \cdot \partial_n \varphi(u) = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt für  $u = 0$

$$\begin{aligned} \partial_k (\psi_m \circ \varphi)(0) &= \sum_{n=1}^N \partial_n \psi_m(\varphi(0)) \cdot \partial_n \varphi(0) \\ &= \sum_{n=1}^N \partial_n \psi_m(p) \cdot \partial_n \varphi(0) \\ &= \langle \nabla \psi_m(p), \partial_k \varphi_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

Also gilt  $T_p F = (N_p F)^\perp$ . Für festes  $\psi$  und verschiedene  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$  sind sowohl  $T_p F$  als auch  $T_p \tilde{F}$  das orthogonale Komplement von  $N_p F$  und daher einander gleich. Argumentiere analog für  $N_p F$ .  $\square$

## 13 Maße

### 13.1 Mengenringe und additive Mengenfunktionen

**Im Folgenden bezeichne**

- $X, Y$  beliebige Mengen
- $\mathfrak{P}(X)$  die Potenzmenge von  $X$ , d.h.  $\mathfrak{P}(X)$  ist die Familie aller Teilmengen von  $X$ .
- $\mathfrak{F}(X, Y)$  die Menge aller Funktionen von  $X$  nach  $Y$ .

**Definition 13.1** (*charakteristische Funktion*)

Für eine Menge  $A \in \mathfrak{P}(X)$  nennen wir

$$\begin{aligned}\chi_A : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}\end{aligned}$$

die charakteristische Funktion von  $A$ .

**Bemerkung** Zu allen  $f \in \mathfrak{F}(X, \{0, 1\})$  gibt es ein  $A \in \mathfrak{P}(X)$ . Insbesondere ist

$$\begin{aligned}\iota : \mathfrak{P}(X) &\rightarrow \mathfrak{F}(X, \{0, 1\}) \\ A &\mapsto \chi_A\end{aligned}$$

bijektiv.

**Lemma 13.2** (*Eigenschaften der charakteristischen Funktion*)

Für  $A, B \in \mathfrak{P}(X)$  gelten

$$\begin{aligned}\chi_\emptyset &= 0 \\ \chi_X &= 1 \\ \chi_A &= \chi_A^2 \\ \chi_{A \cap B} &= \chi_A \cdot \chi_B \\ \chi_{A \cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \\ \chi_{A \setminus B} &= \begin{cases} \chi_A - \chi_B & \text{falls } B \subset A \\ \chi_A \cdot (1 - \chi_B) & \text{sonst} \end{cases} \\ A \subset B &\Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B\end{aligned}$$

**Beweis.** Nachrechnen für  $x \in A$  und  $x \notin A$ . □

**Definition 13.3** (*(Mengen-)Ring, additive Funktion, symmetrische Differenz*)

Eine Familie  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$  nennen wir einen (Mengen-)Ring, wenn für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  auch die Mengen  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  in  $\mathfrak{R}$  enthalten sind.

Eine Funktion  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty)$  nennen wir additiv, wenn für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  mit leerem Schnitt gilt

$$\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Wir definieren die symmetrische Differenz durch

$$S(A, B) := (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A)$$

**Bemerkung** Wir verwenden die Bezeichnungen aus Definition 13.3.

Für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  ist  $S(A, B) \in \mathfrak{R}$ , denn  $A \cup B$  und  $A \setminus B$  sind in  $\mathfrak{R}$ .

$\mathfrak{R}$  ist schon dann ein Ring, wenn für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  die Mengen  $A \cup B$  und  $A \setminus B$  in  $\mathfrak{R}$  enthalten sind, denn  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .

**Lemma 13.4** Sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring,  $A, B \in \mathfrak{R}$  und  $\mu$  eine additive Funktion, dann gelten

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \quad (1)$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad (2)$$

$$\mu(A \setminus B) = \begin{cases} \mu(A) - \mu(B) & \text{falls } B \subset A \\ \mu(A) - \mu(B) + \mu(B \setminus A) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

**Beweis.** Nachrechnen.

**Definition und Satz 13.5** (von einer Menge erzeugter Ring)

Sei  $M \subset \mathfrak{P}(X)$ , dann ist der Durchschnitt aller Ringe die  $M$  als Teilmenge enthalten, selbst wieder ein Ring und wird der von  $M$  erzeugte Ring genannt. Notation  $\mathfrak{R}_M$ .

**Beweis.** Seien  $A, B \in \mathfrak{R}_M$ , dann ist  $A \cup B \in \mathfrak{R}_M$  und  $A \setminus B \in \mathfrak{R}_M$ . □

**Satz 13.6** Sei  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}(X)$  eine Mengefamilie mit den Eigenschaften

$$(I1) \quad \forall I, J \in \mathfrak{I} \quad I \cap J \in \mathfrak{I}$$

$$(I2) \quad \forall I, J \in \mathfrak{I} \quad I \setminus J = \bigcup_{k=1}^K I_k \quad \text{mit } I_k \in \mathfrak{I}$$

Dann ist

$$\mathfrak{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^K I_k \mid I_k \in \mathfrak{I} \right\}$$

Der von  $\mathfrak{I}$  erzeugte Ring und es gilt

$$\mathfrak{R} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}} := \left\{ \bigcup_{l=1}^L J_l \mid J_l \in \mathfrak{I} \right\}$$

Ist weiterhin  $\mu : \mathfrak{I} \rightarrow [0, \infty)$  additiv, so ist auch

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : \mathfrak{R} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}} &\rightarrow [0, \infty) \\ \bigcup_{l=1}^L I_l &\mapsto \sum_{l=1}^L \mu(I_l) \end{aligned}$$

wohldefiniert und additiv

**Beweis.** (Skizze)

(1) Um nachzuweisen, dass  $\mathfrak{R}$  ein Ring ist müssen die Eigenschaften

(i)  $A \cup B \in \mathfrak{R}$  und (ii)  $A \setminus B \in \mathfrak{R}$

nachgewiesen werden. Hierbei ist (i) klar, denn eine Vereinigung von endlichen Vereinigungen ist selbst wieder endlich und (ii) folgt aus (I2) und den Demorganschen Regeln.

(2) Zeige nun  $\mathfrak{A} = \overset{\circ}{\mathfrak{A}}$ . Dazu sei

$$A = \bigcup_{k=1}^K I_k \in \mathfrak{A}$$

und beweise die Behauptung induktiv über  $K$ . Der Induktionsanfang  $K = 1$  ist trivial und für den Schritt betrachte

$$A = \bigcup_{k=1}^K I_k \cup I_{K+1} \stackrel{I.A.}{=} \overset{\bullet}{\bigcup}_{m=1}^M J_m \cup I_{K+1} = \overset{\bullet}{\bigcup}_{m=1}^M (J_m \setminus I_{K+1}) \dot{\cup} I_{K+1} \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}$$

(3) Zur Wohldefiniertheit und Additivität von  $\hat{\mu}$  betrachte eine Menge  $A \in \overset{\circ}{\mathfrak{A}}$  mit den Darstellungen

$$\overset{\bullet}{\bigcup}_{k=1}^K I_k = A = \overset{\bullet}{\bigcup}_{m=1}^M J_m$$

und zeige unter Ausnutzung der Additivität von  $\mu$ :

$$\sum_{k=1}^K \mu(I_k) = \sum_{m=1}^M \mu(J_m)$$

□

**Definition und Satz 13.7** (Ringe über dem karthesischen Produkt)

Seien  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$  und  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(Y)$  Ringe und  $\alpha : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty)$  sowie  $\beta : \mathfrak{B} \rightarrow [0, \infty)$  additive Funktionen. Dann ist

$$\mathfrak{C} := \left\{ \bigcup_{k=1}^K A_k \times B_k \mid A_k \in \mathfrak{A}, B_k \in \mathfrak{B} \right\}$$

der von  $\mathfrak{C}_0 := \{A \times B \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$  erzeugte Ring und stimmt mit

$$\overset{\circ}{\mathfrak{C}} := \left\{ \overset{\bullet}{\bigcup}_{l=1}^L \tilde{A}_l \times \tilde{B}_l \mid \tilde{A}_l \in \mathfrak{A}, \tilde{B}_l \in \mathfrak{B} \right\}$$

überein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{C} = \overset{\circ}{\mathfrak{C}} &\rightarrow [0, \infty) \\ \overset{\bullet}{\bigcup}_{l=1}^L (A_l \times B_l) &\mapsto \sum_{l=1}^L \alpha(A_l) \cdot \beta(B_l) \end{aligned}$$

wohldefiniert und additiv.

**Beweis.** (Skizze)

Nach Satz 13.6 muss nur gezeigt werden, dass  $\mathfrak{C}_0$  die Bedingungen (I1) und (I2) erfüllt und dass  $\gamma|_{\mathfrak{C}_0}$  additiv ist. Die Bedingungen (I1) und (I2) können schnell mit  $(A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in \mathfrak{C}_0$  nachgerechnet werden. Zur Additivität betrachte die Mengen  $(A \times B), (A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in \mathfrak{C}_0$  mit

$$(A \times B) = (A_1 \times B_1) \dot{\cup} (A_2 \times B_2) \quad \text{und} \quad A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \neq \emptyset$$

Zeige nun  $A = A_1 \cup A_2$  und  $B = B_1 \cup B_2$  dann ist entweder der Schnitt der  $A_i$  oder der Schnitt der  $B_i$  leer. Setze o.B.d.A.  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  dann folgt  $A_1 = A_2$  und somit

$$\begin{aligned} \gamma(A \times B) &= \alpha(A) \cdot \beta(B) = \alpha(A) \cdot (\beta(B_1) + \beta(B_2)) \\ &= \alpha(A_1) \cdot \beta(B_1) + \alpha(A_2) \cdot \beta(B_2) \\ &= \gamma(A_1 \times B_1) + \gamma(A_2 \times B_2) \end{aligned}$$

□

**Definition 13.8** (Quader, Maß  $\lambda_N$ )

Ein Quader im  $\mathbb{R}^N$  ist das karthesische Produkt  $Q := I_1 \times \dots \times I_N$  von  $N$  Intervallen  $I_n := [a, b]$ . Wir definieren das Maß eines Quaders  $Q$  im  $\mathbb{R}^N$  durch

$$\lambda_N(Q) := \prod_{n=1}^N \lambda_1(I_n)$$

mit

$$\lambda_1([a, b]) := \lambda_1((a, b)) := \lambda_1([a, b)) := \lambda_1((a, b]) := b - a$$

Für  $x, y \in \mathbb{R}^N$  schreiben wir  $x \leq y := \Leftrightarrow \forall_n a_n \leq b_n$  und definieren damit

$$\begin{aligned} Q[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \forall_n a_n \leq x_n \leq b_n\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \leq x \leq b\} \\ Q(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \forall_n a_n < x_n < b_n\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a < x < b\} \quad \text{sowie} \\ \mathbb{1} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Satz 13.9** (Der Ring  $\mathfrak{R}_N$ )

Die Familie  $\mathfrak{R}_N$  aller endlichen Vereinigungen von Quadern im  $\mathbb{R}^N$  ist ein Ring und stimmt mit der Familie der  $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}_N$  aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern des  $\mathbb{R}^N$  überein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lambda_N : \mathfrak{R}_N = \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_N &\rightarrow [0, \infty) \\ \bigcup_{k=1}^K Q_k &\mapsto \sum_{k=1}^K \lambda_N(Q_k) \end{aligned}$$

additiv und wohldefiniert für Quader  $Q_k$ .

**Beweis.** Per Induktion über  $N$ .

Für den Anfang  $N = 1$  sei  $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$  die Familie aller Intervalle und  $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}$ . Dann gelten die

Bedingungen (I1) und (I2) aus Satz 13.6 und somit folgt die Behauptung für  $N = 1$ . Für den Schritt von  $N$  auf  $N + 1$  fasse  $\mathbb{R}^{N+1}$  als  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  auf und definiere

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &:= \mathfrak{R}_N && \text{ist ein Ring nach Induktions Annahme} \\ \mathfrak{B} &:= \mathfrak{R}_1 && \text{ist ein Ring nach Induktions Anfang} \\ \alpha &:= \lambda_N && \text{ist additiv nach Induktions Annahme} \\ \beta &:= \lambda_1 && \text{ist additiv nach Induktions Anfang}\end{aligned}$$

Für  $Q_{N+1} := Q_N \times I_{N+1} = I_1 \times \dots \times I_N \times I_{N+1}$  mit  $I_n \in \mathfrak{I}$  gilt

$$\lambda_{N+1}(Q_{N+1}) = \lambda_N(Q_N) \cdot \lambda_1(I_{N+1})$$

und somit folgt die Behauptung aus den Sätzen 13.6 und 13.7. □

## 13.2 Maßräume

Nach wie vor bezeichne  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathfrak{A}$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{P}(X)$ .

**Definition 13.10** ( *$\sigma$ -Ring,  $\sigma$ -Algebra,  $\sigma$ -Additiv, Maßraum*)

1.  $\mathfrak{A}$  heißt  $\sigma$ -Ring, wenn  $\mathfrak{A}$  ein Ring ist und für alle  $A_k \in \mathfrak{A}$  gilt:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$$

2.  $\mathfrak{A}$  heißt Algebra [bzw.  $\sigma$ -Algebra], wenn  $\mathfrak{A}$  ein Ring [bzw.  $\sigma$ -Ring] ist und  $X \in \mathfrak{A}$  ist.

3. Eine Abbildung  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  heißt  $\sigma$ -Additiv, wenn für  $A_k \in \mathfrak{A}$  gilt

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} a_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Ist  $\mathfrak{A}$  „nur“ ein Ring, so muss die unendliche disjunkte Vereinigung der  $A_k$  in  $\mathfrak{A}$  enthalten sein.

4.  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  heißt Maßraum, wenn  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(X)$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu : \mathfrak{S} \rightarrow [0, \infty]$   $\sigma$ -Additiv ist.

5.  $X$  heißt  $\sigma$ -endlich bezüglich  $\mathfrak{A}$ , wenn mit  $X_k \in \mathfrak{A}$  gilt

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} X'_j$$

6. Als Konvention führen wir  $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$  ein.

**Lemma 13.11** Für  $a_{kl} \in [0, \infty]$  gilt

$$R := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} =: L$$

**Beweis.** Der Sonderfall, dass es ein  $k_1$  gibt, so dass die Summe über die  $l$  den Wert  $+\infty$  annimmt und damit  $L = +\infty$  gilt ist trivial denn es gilt

$$R \geq \sum_{l=1}^{\infty} a_{k_1 l} = +\infty = L$$

Im Hauptfall, dass es ein solches  $k_1$  nicht gibt, die Summe über die  $l$  also für alle  $k$  kleiner als  $+\infty$  ist, sei ein  $\varepsilon$  gegeben, dann gibt es ein  $K$  so dass

$$R \geq \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \geq \begin{cases} L - \varepsilon & \text{für } L < +\infty \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } L = +\infty \end{cases} =: L_\varepsilon$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt  $R \geq L$  und aus Symmetriegründen auch  $L \geq R$ . □

**Im Folgenden setzen wir stets voraus:**

- V<sub>1</sub>**  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$  ist ein Ring.
- V<sub>2</sub>**  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty)$  ist additiv.
- V<sub>3</sub>**  $X$  ist  $\sigma$ -endlich bzgl.  $\mathfrak{R}$ .

**Definition 13.12** (Äußeres Maß, Nullmenge)

Für  $M \in \mathfrak{P}(X)$  definieren wir das äußere Maß als

$$\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathfrak{R} \text{ und } M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

Weiter heißt  $M$  Nullmenge, wenn  $\mu^*(M) = 0$  ist.

**Satz 13.13** (Telmengen von Nullmengen sind Nullmengen)

Sei  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}(X)$  die Familie aller Nullmengen, dann ist  $\mathfrak{N}$  ein  $\sigma$ -Ring. Insbesondere gilt damit für alle  $Z \in \mathfrak{P}(X)$  und für alle  $N \in \mathfrak{N}$

$$Z \subset N \Rightarrow Z \in \mathfrak{N}$$

**Beweis.** Wir wollen zeigen, dass für  $N_k \in \mathfrak{N}$  auch die unendliche Vereinigung über die  $N_k$  in  $\mathfrak{N}$  enthalten ist. Wähle also zu jedem  $N_k$  Mengen  $A_{kl} \in \mathfrak{R}$  mit den Eigenschaften

$$N_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl}) < \varepsilon_k$$

Dann gilt

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}$$

und damit

$$\mu^*(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl}) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$$

Wähle also  $\varepsilon_k := \varepsilon \cdot 2^{-k}$ , dann ist  $\mu^*(N) = 0$ . □

**Lemma 13.14** (Eigenschaften von  $\mu^*$ )Für  $M_i \in \mathfrak{P}(X)$  und  $A \in \mathfrak{R}$  gelten

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Für  $M_1 \subset M_2$  gilt  $\mu^*(M_1) < \mu^*(M_2)$
3.  $\mu^*(A) = \mu(A)$
4.  $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_k)$

**Beweis.** 1. - 3. sind klar, zu 4. definiere

$$L := \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_k) =: R$$

und betrachte den Sonderfall, dass es ein  $k_1$  gibt so dass  $\mu^*(M_{k_1}) = +\infty$  ist, dann ist  $R = +\infty$ .  
 Im Hauptfall, dass für alle  $k$  das äußere Maß der  $M_k$  nicht unendlich groß ist wähle  $A_{kl} \in \mathfrak{R}$  mit den Eigenschaften

$$M_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl} \quad \text{und} \quad \mu^*(M_k) + \varepsilon_k > \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl})$$

Dann gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k) + \varepsilon_k$$

□

**Lemma 13.15** (Eigenschaften der symmetrischen Differenz)Für  $A, A_1, A_2, A_i, B, B_1, B_2, B_i, C \in \mathfrak{P}(X)$ ,  $I$  eine Indexmenge und die symmetrische Differenz  $S(A, B) := (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A)$  gelten

1.  $S(A, B) = S(B, A)$
2.  $S(A, B) = S(X \setminus A, X \setminus B)$
3.  $S(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2), S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2), S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$
4.  $S\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right), S\left(\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} B_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} S(A_i, B_i)$
5.  $S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B)$

**Beweis.** (Idee)

3. folgt aus 4. und 4. folgt aus 2. und Demorgan. Rest Nachrechnen.

**Definition und Lemma 13.15'** (Halbmetrik auf  $\mathfrak{P}(X)$ )

Seien die Bezeichnungen wie gerade. Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) &\rightarrow [0, \infty] \\ (A, B) &\mapsto \mu^*(S(A, B)) \end{aligned}$$

ist fast eine Metrik, und es gelten

**DIST 1'**  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow S(A, B) \in \mathfrak{N}$

**DIST 2'**  $d(A, B) = d(B, A)$

**DIST 3'**  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Weiter gelten

$$\left. \begin{array}{l} d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \end{array} \right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} d\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \\ d\left(\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} B_i\right) \end{array} \right\} \leq \sum_{i \in I} d(A_i, B_i)$$

**Beweis.** Folgt unmittelbar aus Lemma 13.15 □

### Generalvoraussetzungen

Wir erweitern die bisherigen Generalvoraussetzungen

**V<sub>1</sub>**  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$  ist ein Ring.

**V<sub>2</sub>**  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty)$  ist additiv.

**V<sub>3</sub>**  $X$  ist  $\sigma$ -endlich bzgl.  $\mathfrak{R}$ .

um eine Alternative

**V'<sub>3</sub>**  $X \in \mathfrak{R}$  und  $\mu(X) < \infty$

**Satz 13.16** Unter den Voraussetzungen **V<sub>1</sub>**, **V<sub>2</sub>** und **V'<sub>3</sub>** ist

$$\mathfrak{S} := \{ S \in \mathfrak{P}(X) \mid d(S, A) \rightarrow 0 \text{ für eine Folge } (A_k) \text{ aus } \mathfrak{R} \}$$

eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*_{|\mathfrak{S}}$  ist  $\sigma$ -additiv. Dabei gilt für alle  $S \in \mathfrak{S}$

$$\mu^*(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \quad \text{falls } d(A_k, S) \rightarrow 0$$

**Beweis.** (Skizze)

**1.** Zeige:  $\mathfrak{S}$  ist ein Ring.

Für  $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$  gibt es Folgen  $(A_{1k}), (A_{2k}) \subset \mathfrak{R}$  mit  $d(S_i, A_{ik}) \rightarrow 0$ . Mit Lemma 13.15 gilt

$$d(S_1 \cap S_2, A_{1k} \cap A_{2k}) = d(S_1, A_{1k}) + d(S_2, A_{2k}) \rightarrow 0$$

**2.**  $\mu^*$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathfrak{S}$ .

Seien  $S = S_1 \dot{\cup} S_2 \in \mathfrak{S}$  mit  $(A_{1k}), (A_{2k}) \subset \mathfrak{R}$  wie oben, dann betrachte

$$\left| \mu^*(S) - [\mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)] \right| \leq d(A_{1k} \cup A_{2k}, S) + d(A_{1k}, S_1) + d(A_{2k}, S_2) + \mu(A_{1k} \cap A_{2k}) \rightarrow 0$$

Also gilt  $\mu^*(S) = \mu^*(S_1 \dot{\cup} S_2) = \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)$  Hiermit verallgemeinere zu

$$S := \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \quad \text{mit } S, S_k \in \mathfrak{S}$$

Es gelten

$$\mu^*(S) \geq \sum_{k=1}^K \mu^*(S_k) \quad \text{denn } \bigcup_{k=1}^K S_k \subset S$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^K S_k\right) = \sum_{k=1}^K \mu^*(S_k)$$

Mit dem Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung.

3. Zeige:  $\mathfrak{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra. Definiere dazu

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \quad \text{mit } S_k \in \mathfrak{G} \text{ und } S \in \mathfrak{P}(X)$$

Wähle hierzu  $A_K \in \mathfrak{A}$  mit  $d(A_K, S_K) < \varepsilon_k := \varepsilon \cdot 2^{-k}$  dann gilt

$$d\left(S, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = d\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d(S_k, A_k) < \varepsilon$$

Stelle  $S$  nun als disjunkte Vereinigung dar, via  $S'_1 := S_1$  und  $S'_{k+1} := S_{k+1} \setminus \bigcup_{j \leq k} S'_j$  dann folgt aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\mu^*$  auf  $\mathfrak{G}$

$$d\left(S, \bigcup_{k=1}^K S'_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=K+1}^{\infty} S'_k\right) \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mu^*(S'_k) < \varepsilon$$

□

**Satz 13.17** Unter den Voraussetzungen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  lässt sich  $\mathfrak{A}$  zu einer  $\sigma$ -Algebra erweitern, so dass  $\mu := \mu^*|_{\mathfrak{G}}$  eine  $\sigma$ -Additive Abbildung ist. Dann ist  $(X, \mathfrak{G}, \mu)$  ein Maßraum. Genauer gilt

$$\mathfrak{G} := \left\{ S \in \mathfrak{P}(X) \mid \forall_j d(S \cap X_j, A_k) \rightarrow 0 \text{ für eine Folge } (A_k) \subset \mathfrak{A} \text{ mit } A_k \subset X_j \right\}$$

Mit den  $X_j$  aus 13.10 (5) und weiter ist

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(S \cap X_j)$$

**Beweis.** (Skizze)

nach Voraussetzung ist  $X$   $\sigma$ -endlich bezüglich  $\mathfrak{A}$ , d.h. es gibt  $X_j \in \mathfrak{A}$  so dass

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$$

Definiere den Ring  $\mathfrak{A}_j$  sowie die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}_j$  wie folgt

$$\mathfrak{A}_j := \{ A \in \mathfrak{A} \mid A \subset X_j \}$$

$$\mathfrak{G}_j := \{ S \in \mathfrak{P}(X) \mid S \subset X_j \text{ und } d(A_k, S) \rightarrow 0 \text{ mit } A_k \in \mathfrak{A}_j \}$$

Bleibt zu zeigen, dass  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist. Hierfür muss gezeigt werden, dass

$$\mu^*(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(S \cap X_j)$$

gilt, sei dazu  $d(S \cap X_j, A_j) < \varepsilon \cdot 2^{-j}$  mit  $A_j \subset X_j \in \mathfrak{R}$ . Definiere  $S \cap X_j =: B_j$  dann zeige via Abschätzung von

$$\left| \mu^* \left( \bigcup_{j=1}^J B_j \right) - \sum_{j=1}^J \mu^*(B_j) \right|$$

dass die Gleichung

$$\mu^*(S) = \mu^* \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j)$$

gilt. Der Sonderfall  $\mu^*(S) = +\infty$  ist trivial, betrachte also für den Hauptfall

$$\bigcup_{j=1}^J B_j \subset S$$

und führe den Grenzübergang von  $J \rightarrow \infty$  durch. □

**Definition und Satz 13.18** (Vollständiger Maßraum,  $\sigma$ -endlicher Maßraum)

Ein Maßraum  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  heißt vollständig, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge selbst eine Nullmenge ist. Wir definieren die Familie der Nullmengen in  $\mathfrak{S}$  durch

$$\mathfrak{S}_0 := \{S \in \mathfrak{S} \mid \mu(S) = 0\}$$

Der Maßraum heißt  $\sigma$ -endlich, wenn

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \quad \text{mit } X_j \subset \mathfrak{S}_F := \{S \in \mathfrak{S} \mid \mu(S) < \infty\}$$

Hierbei ist  $\mathfrak{S}$  die Familie der Mengen mit endlichem Maß bezüglich  $\mu$ . Die nach Satz 13.17 konstruierten Maßräume sind vollständig und  $\sigma$ -endlich. □

**Definition und Satz 13.19** (Lebesgue-Maß, Lebesgue messbare Mengen)

Sei  $X := \mathbb{R}^N$ , dann erfüllen  $\mathfrak{R}_N = \overset{\circ}{\mathfrak{R}}_N$  und  $\lambda_N$  die Voraussetzungen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$ . Die hieraus nach Satz 13.17 konstruierte  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{S}_N$  heißt Familie der Lebesgue meßbaren Mengen im  $\mathbb{R}^N$  und  $\lambda_N := \lambda_{N|_{\mathfrak{S}_N}}$  heißt Lebesgue-Maß. Der Maßraum  $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{S}_N, \lambda_N)$  ist vollständig und  $\sigma$ -endlich. □

**Definition und Satz 13.20** (Produkt von Maßräumen, Produktmaß)

Seien  $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$  und  $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$  vollständige und  $\sigma$ -endliche Maßräume, dann ist

$$\mathfrak{R} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}} := \left\{ \bigcup_{k=1}^K A_k \times B_k \mid A_k \in \mathfrak{A}_F \text{ und } B_k \in \mathfrak{B}_F \right\}$$

ein Ring,  $X \times Y$  ist  $\sigma$ -endlich bezüglich  $\mathfrak{R}$  und

$$\begin{aligned} \pi : \mathring{R} = \mathring{\mathfrak{R}} &\rightarrow [0, \infty) \\ \bigcup_{k=0}^K A_k \times B_k &\mapsto \sum_{k=1}^K \alpha(A_k) \cdot \beta(B_k) \end{aligned}$$

ist additiv. Damit sind die Voraussetzungen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  erfüllt, d.h. der nach Satz 13.17 konstruierte Maßraum  $(X \times Y, \mathfrak{S}, \pi)$  mit  $\pi := \pi|_{\mathfrak{S}}$  ist vollständig und  $\sigma$ -endlich und heißt das Produkt der Maßräume  $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$  und  $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$  und  $\pi$  heißt das Produktmaß.  $\square$

**Satz 13.21**  $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{S}_N, \lambda_N)$  ist das Produkt der Maßräume  $(\mathbb{R}^{N_1}, \mathfrak{S}_{N_1}, \lambda_{N_1})$  und  $(\mathbb{R}^{N_2}, \mathfrak{S}_{N_2}, \lambda_{N_2})$  wenn  $N = N_1 + N_2$  gilt.

**Beweis.** (Idee)

Zeige  $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{S}_N, \lambda_N) = (\mathbb{R}^N, \mathfrak{S}_\pi, \pi)$  durch den Nachweis von  $\mathfrak{S}_N \subset \mathfrak{S}_\pi \subset \mathfrak{S}_N$  und  $\lambda^* \leq \pi \leq \lambda^*$

**Lemma 13.22** Im  $\mathbb{R}^N$  sind alle offenen Mengen meßbar

**Beweis.** Es gilt

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} W_z \quad \text{mit } W_z := Q[z, z + \mathbb{1}]$$

Mit  $x \in \mathbb{R}^N$  und der Gaussklammer gilt dann  $x_n = [x_n] + \tau_n$  mit  $\tau_n \in [0, 1)$ , daher ist  $x \in W[x]$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto 2^{-m} \cdot x \end{aligned}$$

und definiere  $W_{m,z} := Q[2^{-m}z, 2^{-m}(z + \mathbb{1})]$  für  $z \in \mathbb{Z}^N$ . Sei nun  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge und  $x \in \Omega$ , dann gibt es ein  $z \in \mathbb{Z}^N$  derart, dass für ein hinreichend großes  $m$  gilt:  $x \in W_{m,z} \subset \Omega$ . Daher

$$\Omega = \bigcup_{W_{m,z} \subset \Omega} W_{m,z}$$

$\square$

**Definition und Satz 13.23** (Borell-Menge)

Jedes  $S \in \mathfrak{S}_N$  gilt

$$S = B \setminus N$$

mit einer Nullmenge  $N \in \mathfrak{S}_0$  und  $B \in \mathfrak{B}$ . Dabei ist  $\mathfrak{B}$  die von den offenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra.  $B \in \mathfrak{B}$  heißt Borell-Menge.

## 14 Integration

### 14.1 Meßbare Funktionen

Im Folgenden sei  $(X, \mathfrak{G}, \mu)$  ein vollständiger,  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $f, g, f_k, g_k, \dots \in \mathfrak{F}(X, \hat{\mathbb{R}})$ .

**Definition 14.1** (Meßbare Funktion)

Eine Funktion  $f$  heißt meßbar, wenn für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{G}$$

**Lemma 14.2** Für eine Funktion  $f$  sind äquivalent

1.  $f$  ist meßbar
2. Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:  $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{G}$
3. Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:  $\{x \mid f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{G}$
4. Für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:  $\{x \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{G}$
5. Für alle Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  gilt:  $f^{-1}(I) := \{x \mid f(x) \in I\} \in \mathfrak{G}$

**Beweis.** (Ansatz)

Zu (1.  $\Rightarrow$  2.): Für alle  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  gilt  $f(x) > \alpha - \frac{1}{k} \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha$  und weiter ist

$$\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_{>0}} \{x \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{k}\} \in \mathfrak{G}$$

denn  $\mathfrak{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Für (2.  $\Rightarrow$  3.) betrachte

$$\{x \mid f(x) < \alpha\} = \mathbb{R}^N \setminus \{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{G}$$

usw...

□

**Satz 14.3** Alle  $f \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  sind meßbar

**Beweis.** Das Intervall  $(\alpha, \infty)$  ist offen und es gilt

$$\{x \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right)$$

Unter stetigen Abbildungen sind Urbilder offener Mengen offen und diese sind nach 13.22 meßbar. □

**Lemma 14.4** Seien für  $k \in \mathbb{N}$  Funktionen  $f_k$  meßbar, dann sind auch

$$\sup\{f_k\} \quad \inf\{f_k\} \quad \limsup\{f_k\} \quad \liminf\{f_k\}$$

meßbar. Insbesondere sind alle Funktionen  $f$  meßbar, die man als punktweisen Grenzwert meßbarer Funktionen schreiben kann.

**Beweis.** Für  $x \in X$  gilt

$$\sup_k f_k(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} f_k(x) > \alpha - \frac{1}{m}$$

und damit folgt, da  $\mathfrak{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, folgende Gleichung

$$\{x \mid \sup_k f_k(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \mid f_k(x) > \alpha - \frac{1}{m}\} \in \mathfrak{S}$$

Analog folgt die Aussage für  $\inf f_k$  und damit auch für

$$\limsup f_k(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{k \geq K} f_k(x) = \inf_{K \rightarrow \infty} \sup_{k \geq K} f_k(x)$$

und analog für  $\liminf f_k$ . □

## 14.2 Definition und grundlegende Eigenschaften des Integrals

**Definition 14.5** (Einfache Funktion, Standarddarstellung, Treppenfunktion, Integral)  
Eine Funktion  $f \in \mathfrak{F}(X, \hat{\mathbb{R}})$  nennen wir einfach, wenn

$$\text{Im}(f) = \{x \in \hat{\mathbb{R}} \mid \exists y \in X f(y) = x\}$$

endlich ist. Sei nun  $\#\text{Im}(f) = K$ , dann nennen wir

$$f = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k := \{y \in X \mid f(y) = w_k\} \text{ und } \mu(\{y \mid f(y) \neq 0\}) < \infty$$

die Standarddarstellung von  $f$ . Eine einfache, meßbare Funktion mit  $\text{Im}(f) = f(X) \subset \mathbb{R}$  nennen wir eine Treppenfunktion  $t$  und definieren das Integral von  $t$  durch

$$\int_X t d\mu := \sum_{k=1}^K w_k \cdot \mu(S_k) \quad \text{mit } t = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \text{ ist die Standarddarstellung von } t$$

Die Menge aller Treppenfunktionen bezeichnen wir mit  $\mathfrak{T}$ .

**Satz 14.6** (Eigenschaften von  $\mathfrak{T}$ )

1. Seien  $T_l \in \mathfrak{S}_F$  und  $v_l \in \mathbb{R}$ , dann gehört

$$t := \sum_{l=1}^L v_l \cdot \chi_{T_l}$$

zum Raum  $\mathfrak{T}$  der Treppenfunktionen und es gilt

$$\int_X t d\mu = \sum_{l=1}^L v_l \cdot \mu(T_l)$$

2. Der Raum  $\mathfrak{T}$  der Treppenfunktionen ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und das Integral

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{T} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_X t \, d\mu \end{aligned}$$

ist linear und monoton.

**Beweis.** (Skizze)

Zu 1.) Im Allgemeinen gilt nicht  $T_l \cap T_k = \emptyset$  jedoch ist  $t$  einfach. Weiter ist die Funktion, als Summe meßbarer Funktionen, meßbar und es gilt

$$M := \{x \mid t(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{l=1}^L T_l$$

daher ist  $\mu(M) < \infty$  und  $t$  ist eine Treppenfunktion. Es bleibt zu zeigen:

$$(1) \quad \sum_{l=1}^L w_l \cdot \chi_{S_l} = \sum_{k=1}^K v_k \cdot \chi_{T_k} \stackrel{!}{\Rightarrow} \sum_{l=1}^L w_l \cdot \mu(S_l) = \sum_{k=1}^K v_k \cdot \mu(T_k) \quad (2)$$

Betrachte den Sonderfall  $K = 1$  und für alle  $l$  gilt  $S_l \subset T_1 =: T$  dann ist zu zeigen:

$$\sum_{l=1}^L w_l \cdot \chi_{S_l} = v \cdot \chi_T \stackrel{!}{\Rightarrow} \sum_{l=1}^L w_l \cdot \mu(S_l) = v \cdot \mu(T)$$

Beweise den Sonderfall nun per Induktion über  $L$ . Der Anfang für  $L = 1$  ist klar, denn dann gelten  $w_1 = v$  und  $S_1 = T$ . Für den Schritt von  $L$  auf  $L + 1$  betrachte

$$\sum_{l=1}^L w_l \cdot \chi_{S_l} + w \cdot \chi_S = v \cdot \chi_T \quad \text{mit } w := w_{L+1} \text{ und } S := S_{L+1}$$

Forme diese Aussage unter Ausnutzung der Induktionsannahme und der in Lemma 13.2 gezeigten Eigenschaften der charakteristischen Funktion um zu

$$\sum_{l=1}^{L+1} w_l \cdot \mu(S_l \cap S) = v \cdot \mu(T) \quad \text{denn } \mu(S_l \cap S) = S_{L+1} =: S \text{ für } l = L + 1$$

Da  $\mu$  additiv ist folgt die Aussage für den Sonderfall. Für den Hauptfall betrachte eine Umformung von Formel (1)

$$\sum_{l=1}^L w_l \cdot \chi_{S_l} + \sum_{k=1}^K (-v_k) \cdot \chi_{T_k} = 0 = 0 \cdot \chi_U \quad \text{mit } U := \bigcup_{l=1}^L S_l \cup \bigcup_{k=1}^K T_k$$

Mit dieser Umformung gilt der Sonderfall auch hier und wir erhalten die Aussage vom ersten Satzteil  
Zu 2.) Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $t, s \in \mathfrak{T}$  zwei Treppenfunktionen, dann gilt

$$\alpha \cdot t + \beta \cdot s = \sum_{l=1}^L (\alpha v_l) \cdot \chi_{T_l} + \sum_{k=1}^K (\beta w_k) \cdot \chi_{S_k} \in \mathfrak{T}$$

Damit ist  $\mathfrak{T}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zur Linearität des Integrals betrachte

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha t + \beta s) d\mu &= \alpha \cdot \sum_{l=1}^L v_l \cdot \chi_{T_l} + \beta \cdot \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \\ &= \alpha \int_X t d\mu + \beta \int_X s d\mu\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Monotonie gelte  $t \leq s$ . Definiere  $p := s - t \geq 0$  mit der Standarddarstellung

$$p = \sum_{i=1}^I u_i \cdot \chi_{U_i}$$

Für alle  $i$  ist  $u_i \geq 0$  und damit folgt

$$\begin{aligned}\int_X s d\mu - \int_X t d\mu &= \int_X p d\mu = \sum_{i=1}^I u_i \cdot \mu(U_i) \\ \Rightarrow \int_X t d\mu &\leq \int_X s d\mu\end{aligned}$$

□

**Definition 14.7** (Integral einer meßbaren Funktion)

Für eine meßbare, nicht-negative Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  nennen wir

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X t d\mu \mid f \geq t \text{ und } t \in \mathfrak{T} \right\}$$

das Integral von  $f$  über  $X$ . Für eine meßbare Funktion  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  nennen wir

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

mit  $f_{\pm} := \max\{\pm f, 0\}$  das Integral von  $f$  über  $X$ , falls die rechte Seite in  $\hat{\mathbb{R}}$  definiert ist.

**Lemma 14.8** Seien  $f, g : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbare Funktionen, dann gelten:

- (1)  $f = f_+ - f_-$
- (2)  $|f| = f_+ + f_-$
- (3) Für  $\alpha > 0$  gilt  $(\alpha f)_{\pm} = \alpha \cdot f_{\pm}$
- (4) Für  $\alpha < 0$  gilt  $(\alpha f)_{\pm} = |\alpha| \cdot f_{\mp}$
- (5) Aus  $f \leq g$  folgt  $f_+ \leq g_+$  und  $f_- \geq g_-$
- (6) Das Integral über  $f$  ist monoton.

**Beweis.** Die Punkte (1), (2) und (5) sind klar. Zu (3) und (4) betrachte

$$\begin{aligned}\alpha > 0 : \quad & (\alpha f)_{\pm} = \max\{\alpha(\pm f), \alpha \cdot 0\} = \alpha \cdot \max\{\pm f, 0\} = \alpha \cdot f_{\pm} \\ \alpha < 0 : \quad & (-|\alpha| \cdot f)_{\pm} = |\alpha| \cdot \max\{\pm f, 0\}\end{aligned}$$

Die Monotonie des Integrals folgt aus Teil (5) und Satz 14.6.

□

**Definition und Lemma 14.9** (Das Integral über einer Teilmenge)

Sei  $A \in \mathfrak{S}$  eine Teilmenge und  $f$  eine meßbare Funktion. Für  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  definieren wir

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \chi_A d\mu$$

Für  $f : A \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  definieren wir

$$\int_A f d\mu = \int_X E_0 f d\mu$$

mit der Nullfortsetzung

$$E_0 f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Menge  $A \in \mathfrak{S}$  ist ein Maßraum mit den meßbaren Mengen

$$\mathfrak{S}' := \{S \in \mathfrak{S} \mid S \subset A\}$$

und  $\mu'(S) := \mu(S)$

□

**Satz 14.10** (Satz von der monotonen Konvergenz [m.K.])

Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge meßbarer, nicht-negativer Funktionen von  $X$  nach  $[0, \infty]$ , die monoton steigt, d.h. für alle  $k$  gelte  $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ , dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

**Beweis.** (Skizze) Definiere

$$f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$$

dann existiert  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  als meßbare Funktion und für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $f_k \leq f$ . Weiter gilt nach Lemma 14.8

$$f_k \leq f \Rightarrow \int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \leq \int_X f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

Für die andere Relation ( $\geq$ ) wähle  $\tilde{t} \in \mathfrak{T}$  mit  $f \geq \tilde{t}$ , dann ist  $f \geq t := \tilde{t}_+$ , denn  $f \geq 0$ . Definiere nun

$$t_\varepsilon := t - \varepsilon \cdot \chi_S \quad \text{mit } S := \{x \in X \mid t(x) > 0\} \text{ und } \mu(S) < \infty$$

Definiere weiter  $w_{\min} := \min\{t(x)\}$  und  $w_{\max} := \max\{t(x)\}$ . Für alle  $x \in S$  gilt dann  $0 \leq w_{\min} \leq t(x) \leq w_{\max}$ . Setze  $\varepsilon \in (0, w_{\min})$  und

$$T_k := \{x \mid f_k(x) < t_{\varepsilon}(x)\}$$

Wegen  $f_k \leq f_{k+1}$  gilt  $T_k \subset T_{k+1}$  also  $T_k \subset S$ . Bezeichne nun den Schnitt über alle  $T_k$  mit  $T$  und zeige  $T$  ist leer. Danach gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(T_k) = \mu(T) = 0$$

Zeige damit

$$\int_X f_k d\mu \geq \int_X t d\mu - w_{\max} \cdot \mu(T_k) - \varepsilon \cdot \mu(S)$$

Mit den Grenzübergängen  $k \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf der rechten Seite gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \geq \int_X t d\mu - 0 - 0 \geq \int_X \tilde{t} d\mu$$

Die Aussage folgt dann aus

$$\sup\left\{\int_X \tilde{t} d\mu \mid \tilde{t} \in \mathfrak{T}\right\} = \int_X f d\mu$$

□

**Bemerkung** (Varianten vom Satz über die monotone Konvergenz)

Der Satz 14.10 gilt auch für Folgen  $g \leq f_k \leq f_{k+1}$  mit

$$\int_X |g| d\mu < \infty$$

sowie für monoton fallende Folgen  $g \geq f_k \geq f_{k+1}$ . Seien für  $i = 1 \dots \infty$  Funktionen  $0 \leq g_i$  meßbar, dann gilt auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_X g_i d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} g_i d\mu$$

**Lemma 14.11** *Jede meßbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  ist punktwiser Grenzwert einer aufsteigenden Folge  $(t_k) \subset \mathfrak{T}$  von Treppenfunktionen. Ist  $f$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.*

**Beweis.** Definiere  $I_M := [0, 2^M)$  und  $I_\infty := [2^M, \infty]$ , dann bilden diese Intervalle eine Zerlegung von  $[0, \infty] = I_M \dot{\cup} I_\infty$ . Zerlege  $I_M$  nun in Teilintervalle der Länge  $2^{-M}$  durch

$$I_{M,m} := [m \cdot 2^{-M}, (m+1) \cdot 2^{-M}) \quad \text{mit } 0 \leq m \leq 2^{2M} - 1$$

Mit dieser Zerlegung gilt

$$I_{M+1,2m} \dot{\cup} I_{M+1,2m+1} = [2m \cdot 2^{-(M+1)}, 2(m+1) \cdot 2^{-(M+1)}) = I_{M,m}$$

Wir haben unsere Zerlegung von  $[0, \infty]$  also verfeinert zu

$$[0, \infty] = \bigcup_{m=1}^{2^{2M}-1} I_{M,m} \dot{\cup} I_\infty$$

Definiere nun eine Folge  $(t_k) \subset \mathfrak{T}$  durch

$$t_M(x) = \begin{cases} 2^M & \text{für } f(x) \in I_\infty \\ m \cdot 2^{-M} & \text{für } f(x) \in I_{M,m} \end{cases}$$

Für  $f(x) \in I_{M,m}$  gilt nun  $0 \leq f(x) - t_M(x) < 2^{-M}$  und somit bereits die gleichmäßige Konvergenz für beschränktes  $f$ . Betrachte nun die Fälle

1. ( $f = +\infty$ ) : Nach Definition ist  $t_M(x) = 2^M$ . Durch den Grenzübergang  $M \rightarrow \infty$  erhalte die Aussage.

2. ( $f < +\infty$ ) : In diesem Fall gibt es ein  $M_{1,x}$  so dass  $f(x) < 2^{M_{1,x}}$  also gilt für alle  $M \geq M_{1,x}$  die Ungleichung  $0 \leq f(x) - t_M(x) < 2^{-M}$  und damit die Aussage.  $\square$

**Satz 14.12** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei Riemann-Integrierbar, dann existiert auch das Lebesgue-Integral von  $f$  und beide sind einander gleich, d.h.

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_a^b f(t) dt$$

**Beweis.** (Idee)

Definiere Treppenfunktionen  $\underline{t}_m$  und  $\overline{t}_m$  deren Integrale mit der Ober- und Untersumme des Riemann-Integrals übereinstimmen und betrachte  $\underline{t}_m \leq f \leq \overline{t}_m$ .

**Lemma 14.13** Für  $\alpha > 0$  und  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  gelten

$$\int_X \alpha \cdot f d\mu = \alpha \int_X f d\mu \quad \text{und} \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$\square$

**Satz 14.14** Sei  $S \subset X$  eine Teilmenge und  $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  mit definiertem Integral, d.h. es gilt nicht

$$\int_S f_+ d\mu = \int_S f_- d\mu = \infty$$

Dann gilt

$$\int_S f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{S_j} f d\mu \quad , \text{ falls } S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$$

**Definition 14.15** (Der Raum der integrierbaren Funktionen)

Sei  $A \in \mathfrak{P}(X)$  meßbar, dann definieren wir den Raum der über  $A$  integrierbaren Funktionen durch

$$\mathfrak{L}(A) := \{ f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist meßbar und } \int_X |f| d\mu < +\infty \}$$

**Satz 14.16** Der Raum  $\mathfrak{L}(A)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und die Abbildung

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{L}(A) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_A f d\mu \end{aligned}$$

ist monoton und linear.

**Beweis.** (Skizze)

Das  $\mathfrak{L}(A)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist folgt aus Lemma 14.13 und die Linearität rechnet man mit  $f_{\pm}$  leicht nach. Zum Nachweis der Monotonie definiere  $h := -(f + g)$  und Zeige

$$f + g + h = 0 \stackrel{!}{\Rightarrow} \int_A f d\mu + \int_A g d\mu + \int_A h d\mu = 0$$

Zerlege hierzu  $A$  nach Satz 14.14 in Teilgebiete auf denen  $f, g$  und  $h$  jeweils ein festes Vorzeichen haben. Unterscheide die folgenden Fälle:

**Fall1:** Eine der drei Funktionen ist gleich Null, dann folgt die Aussage sofort, denn o.B.d.A. sei  $f = 0$ , dann ist  $g = -h$ .

**Fall2:** Alle Funktionen haben ein gleiches Vorzeichen. Dieser Fall kann wegen  $f + g + h = 0$  nicht eintreten.

**Fall3:** Zwei Vorzeichen positiv, eins negativ. Gelte o.B.d.A.  $f, g > 0$  und  $h < 0$  dann betrachte

$$\int_A f d\mu + \int_A g d\mu + \int_A -(f + g) d\mu = 0 \stackrel{14.13}{\Rightarrow} \int_A f d\mu + \int_A g d\mu = \int_A (f + g) d\mu$$

somit folgt die Aussage aus der Linearität.

**Fall4:** Zwei Vorzeichen negativ und eins positiv. Dieser Fall kann per Multiplikation mit  $-1$  auf den Fall 3 zurückgeführt werden.  $\square$

**Definition und Lemma 14.17** (*fast immer / fast überall*)

Sei  $A(x)$  eine Aussage über  $x \in X$ . Gibt es eine Nullmenge  $N \in \mathfrak{G}_0$  so dass für alle  $x \in X \setminus N$  die Aussage  $A(x)$  gilt, dann sagen wir  $A(x)$  gilt fast immer bzw. fast überall (f.ü.).

Das Integral über einer Nullmenge hat immer den Wert 0. Insbesondere gelten mit  $f, g \in \mathfrak{L}(A)$

$$\begin{aligned} f = g \quad \text{f.ü.} &\Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu \\ \mu(S(A, B)) = 0 &\Rightarrow \int_A f d\mu = \int_B f d\mu \end{aligned}$$

**Beweis.** Zeige, dass für alle Nullmengen  $N \in \mathfrak{G}_0$  und für alle  $f \in \mathfrak{L}(A)$  gilt

$$\int_N f d\mu = 0$$

Sei dazu  $f \geq t \in \mathfrak{T}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \int_N t d\mu &= \sum_{k=1}^K w_k \cdot \mu(S_k \cap N) = 0 \quad \text{mit } t = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \\ \Rightarrow \int_N f d\mu &= \sup \left\{ \int_N t d\mu \mid f \geq t \in \mathfrak{T} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Für  $f = g$  fast überall gilt: Es gibt eine Nullmenge  $N \in \mathfrak{G}_0$  derart, dass für alle  $x \in X \setminus N$  gilt  $f(x) = g(x)$ . Und nach den Rechenregeln für die Symmetrische Differenz gilt für  $\mu(S(A, B)) = 0$ , dass sich  $A$  und  $B$  nur um eine Nullmenge unterscheiden.  $\square$

### 14.3 Integrale in Produkträumen

Im Folgenden bezeichne  $(Z := X \times Y, \mathfrak{G}, \pi)$  das Produkt der Maßräume  $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$  und  $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$ .

**Definition 14.18** (iterierte Integrale)

Sei  $f : Z \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbar, dann definieren wir - sofern möglich - die iterierten Integrale durch

$$(I1) \quad \int_X \left[ \int_Y f(x, y) d\beta(y) \right] d\alpha(x)$$

$$(I2) \quad \int_Y \left[ \int_X f(x, y) d\alpha(x) \right] d\beta(y)$$

Hierbei heißt -sofern möglich- für (I1), dass für fast alle  $x \in X$  gilt:  $f(x, \cdot)$  ist  $\mathfrak{B}$ -meßbar und

$$\int_Y (f(x, \cdot))_+ d\beta < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Y (f(x, \cdot))_- d\beta < \infty$$

Dann ist

$$F(x) := \int_Y f(x, \cdot) d\beta = \int_Y (f(x, \cdot))_+ d\beta - \int_Y (f(x, \cdot))_- d\beta$$

für fast alle  $x \in X$  definiert. Weiter soll  $F$  eine  $\mathfrak{A}$ -meßbare Funktion sein mit

$$\int_Y F_+ d\alpha < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Y F_- d\alpha < \infty$$

Für (I2) gilt selbiges analog.

**Satz 14.19** (Satz von Fubini für nicht negative Funktionen (FuB))

Sei  $f : Z = X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  meßbar, dann gilt

$$\int_Z f d\pi = \int_X \left( \int_Y f d\beta \right) d\alpha = \int_Y \left( \int_X f d\alpha \right) d\beta \quad (\text{FuB})$$

Insbesondere existieren also die Iterierten Integrale und sind einander gleich.

**Beweis.** (Skizze)

Reduziere zunächst auf den Fall, dass  $f$  eine Treppenfunktion  $t \in \mathfrak{T}$  ist. Dies ist möglich, denn jede meßbare Funktion ist punktwiser Grenzwert einer treppenfunktion nach Lemma 14.11 und mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt die Behauptung für  $f$ .

Reduziere nun auf den Fall, dass  $t$  eine charakteristische Funktion ist. Jede Treppenfunktion  $t \in \mathfrak{T}$  hat die Form

$$t = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k \in \mathfrak{G}_F$$

Aus der linearität des Integrals folgt dann aus (FuB) für charakteristische Funktionen (FuB) für Treppenfunktionen. Jede meßbare Menge  $S \in \mathfrak{G}_F$  kann als  $S = B \setminus N$  mit einer Borell-Menge  $B$  und einer Nullmenge  $N$  dargestellt werden. Insbesondere gilt für  $B$

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jkm} \times B_{jkm} \quad \text{mit } A_{jkm} \in \mathfrak{A}_F \quad \text{und} \quad B_{jkm} \in \mathfrak{B}_F$$

Zeige nun (FuB) für  $\chi_B$  und  $\chi_N$ .

$$\begin{aligned}
\int_Z \chi_B d\pi &= \int_Z \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) d\pi(x, y) \\
&\stackrel{m.K}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_Z \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) d\pi(x, y) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi(A_{jkm} \times B_{jkm}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{jkm}) \cdot \beta(B_{jkm}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \int_Y \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) d\beta(y) d\alpha(x)
\end{aligned}$$

Nun können nach dem Satz über die monotone Konvergenz die Grenzprozesse wieder mit den Integralen vertauscht werden und wir haben die Aussage für  $\chi_B$  gezeigt. Betrachte nun

$$\int_Z \chi_N d\pi = 0 \stackrel{!}{=} \int_X \int_Y \chi_N d\beta d\alpha = \int_X \beta(\chi_N(x, \cdot)) d\alpha$$

Es sind zu zeigen:

(i)  $\chi_N(x, \cdot)$  ist  $\mathfrak{B}$ -messbar und (ii)  $\beta(\chi_N(x, \cdot)) = 0$

Da  $X$  und  $Y$   $\sigma$ -endlich sind kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, dass  $N \subset X_j \times y_j$  mit  $X_j \in \mathfrak{A}_F$  und  $Y_j \in \mathfrak{B}_F$  gilt. Da  $\pi^*(N) = \pi(N) = 0$  gilt gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  Mengen  $A_{mk} \in \mathfrak{A}_F$  und  $B_{mk} \in \mathfrak{B}_F$  so dass

$$N \subset V_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{mk} \times B_{mk} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{mk}) \cdot \beta(B_{mk}) < \frac{1}{m}$$

gelten. Damit ist

$$\begin{aligned}
N(x, \cdot) \subset V_m(x, \cdot) &= \bigcup_{\substack{k=1 \\ x \in A_{mk}}}^{\infty} B_{mk} \\
\Rightarrow \beta^*(N(x, \cdot)) &\leq \beta(V_m(x, \cdot)) = \sum_{\substack{k=1 \\ x \in A_{mk}}}^{\infty} \beta(B_{mk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta(B_{mk}) \cdot \chi_{A_{mk}}(x) =: f_m(x)
\end{aligned}$$

Die Funktion  $f_m$  ist messbar und wegen  $V_m \supset V_{m+1}$  monoton fallen. Des weiteren ist  $f_m$  durch  $\beta(Y_j) \cdot \chi_{X_j}(x) \in \mathfrak{L}(A)$  nach oben hin beschränkt. Nach der Variante des Satzes über die monotone Konvergenz für monoton fallende Folgen gilt

$$\int_X \lim_{m \rightarrow \infty} f_m d\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X f_m d\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta(B_{mk}) \cdot \alpha(A_{mk}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$$

Damit ist  $N(x, \cdot)$  für fast alle  $x \in X$  eine Teilmenge einer Nullmenge, denn

$$\beta \left( \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m \right) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_m N \subset V_m$$

Da  $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$  nach Voraussetzung vollständig ist, ist  $\beta(N(x, \cdot)) = 0$  für fast alle  $x \in X$ . □

### Varianten des Satzes von Fubini:

#### Satz 14.19 (Variante 1)

Sei  $f : Z \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  eine meßbare Funktion mit

$$\int_Z f_+ d\pi < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Z f_- d\pi < \infty$$

dann gilt (FuB) für  $f$ .

#### Satz 14.19 (Variante 2)

Eines der beiden iterierten Integrale zu  $|f|$  sei kleiner als  $+\infty$ . Dann gilt dies auch für das andere iterierte Integral. Insbesondere gilt (FuB) und  $f$  gehört zu  $\mathfrak{L}(Z)$ .

#### Satz 14.19 (Variante 3)

Für  $S \in \mathfrak{G}$  und  $f \cdot \chi_S$  seien die Voraussetzungen von Satz 14.19 in einer der vorhergehenden Varianten erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_S f d\pi &= \int_{P_x(S)} \int_{S(x, \cdot)} f(x, \cdot) d\beta(y) d\alpha(x) \\ &= \int_{P_y(S)} \int_{S(\cdot, y)} f(\cdot, y) d\alpha(x) d\beta(y) \end{aligned}$$

#### Definition 14.20 (Träger / Support von $f$ , Kompakt)

Für eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  schreiben wir  $K \Subset M$ .

Für  $A \subset \mathbb{R}^N$  und  $f : A \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  nenne wir

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$$

den Träger bzw. Support von  $f$ . Für eine offene Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  und  $m \in \mathbb{N}$  sei

$$C_m^0(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) \mid \text{supp}(f) \Subset \Omega\}$$

#### Bemerkung

Für  $\hat{x} \notin \text{supp}(f)$  gibt es ein  $\delta > 0$  so dass  $f|_{U_\delta(\hat{x})} = 0$  ist.

Für  $f \in C_m^0(\Omega)$  ist  $\text{supp}(f)$  beschränkt und es gilt

$$\text{dist}(\text{supp}(f), \mathbb{R}^N \setminus \Omega) := \inf \{ |x - y| \mid x \in \text{supp}(f) \text{ und } y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \} > 0$$

#### Lemma 14.21 (Substitutionsregel I)

Sei  $A \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(N)$  und  $b \in \mathbb{R}^N$ , dann gilt für alle  $f \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Ax + b) d\lambda_N(x) = |\det(A)|^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} f(y) d\lambda_N(y)$$

Merkregel:  $y = Ax + b \Rightarrow dy = |\det(A)| \cdot dx$

**Beweis. (Skizze)**

Nach dem Gauß-Algorithmus gibt es eine Permutationsmatrix  $P := (p_{i,j})$ , eine linke untere Dreiecksmatrix  $L := (l_{i,j})$  sowie eine rechte obere Dreiecksmatrix  $R := (r_{i,j})$  mit

$$A = PLR \quad \text{und} \quad \det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(R) = (\pm 1) \prod_{n=1}^N l_{n,n} - 1$$

Wegen  $f \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$  gibt es ein  $\hat{R} \in \mathbb{R}_+$  derart, dass  $\text{supp}(f) \subset Q[-\hat{R} \cdot \mathbb{1}, \hat{R} \cdot \mathbb{1}]$  ist. Es sind also die folgenden Formeln zu zeigen:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x+b) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) d\lambda_N(y) \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Px) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) d\lambda_N(y) \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Lx) d\lambda_n(x) = \left( \prod_{n=1}^N l_{n,n} \right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} f(y) d\lambda_N(y) \quad (3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Rx) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) d\lambda_N(y) \quad (4)$$

Für (1) benutze Induktion über  $N$ . Der Induktionsanfang folgt mit Satz 14.12 aus der Substitutionsregel im  $\mathbb{R}$ .

Für (2) gilt:  $P$  ist eine Permutationsmatrix mit  $P(x) = (x_{\pi(n)} | n = 1 \dots N)$ . Nach Fubini ist die Reihenfolge der iterierten Integrale egal. Definiere also  $y_n := x_{\pi(n)}$ .

Zu (3) benutze Induktion über  $N$ . Für  $N = 1$  betrachte mit  $a := l_{1,1} \neq 0$

$$f(ax) \neq 0 \Rightarrow ax \in [-\hat{R}, \hat{R}] \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{-\hat{R}}{|a|}, \frac{\hat{R}}{|a|} \right]$$

Dann folgt der Induktionsanfang aus der  $\mathbb{R}$ -Substitutionsregel mit  $y = ax$ . Für den Schritt von  $N$  auf  $N + 1$  seien  $a := l_{N+1, N+1}$  und

$$L := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & L' & & \vdots \\ & & & 0 \\ l_{N+1,1} & \dots & l_{N+1,N} & a \end{pmatrix} \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(N+1)$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix  $L' \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(N)$  dann liefert der Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}}^{N+1} f(Lx) d\lambda_{N+1}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \text{sgn}(a) \int_{\alpha}^{\beta} f(A'x', a \cdot x_{N+1} + s(x')) dx_{N+1} d\lambda_N(x')$$

mit  $s(x') := \sum_{n=1}^N l_{N,n} \cdot x_n$ . Substituiere nun  $y_{N+1} := a \cdot x_{N+1} + s(x')$ , dann folgt die Aussage aus der eindimensionalen Substitutionsregel und dem Satz von Fubini.

Für (4) benutze wieder Induktion über  $N$ . Der Anfang für  $N = 1$  mit  $R = r_{1,1}$  ist klar. Für den Schritt von  $N - 1$  auf  $N$  definiere  $x := (x_1, x')$  sowie  $R'$  als  $R$  ohne die erste Spalte und Zeile und betrachte

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(Rx) d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} f(r_{1,1}x_1, R'x') d\lambda_1 d\lambda_{N-1}$$

□

**Definition und Lemma 14.22** (Halbnorm auf  $\mathfrak{L}$ )

Sei  $A \subset X$  eine Teilmenge, dann definieren wir für  $f \in \mathfrak{L}(A)$

$$|f|_1 := |f|_{\mathfrak{L}(A)} := \int_A |f| d\alpha$$

Dann ist  $|\cdot|_1$  eine Halbnorm auf  $\mathfrak{L}(A)$  und es gilt

$$\left| \int_A f d\alpha \right| \leq \int_A |f| d\alpha = |f|_1$$

Weiter gelten

- NORM 1'  $|f|_1 \geq 0$  und  $|0| = 0$
- NORM 2  $|\gamma f|_1 = |\gamma| \cdot |f|_1$  für  $\gamma \in \mathbb{R}$
- NORM 3  $\left| |f|_1 + |g|_1 \right| \leq |f \pm g|_1 \leq |f|_1 + |g|_1$

**Achtung** Bei (NORM 1)' gilt nicht  $|f|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ , stattdessen gilt diese Eigenschaft (nur) fast überall, da  $f$  auf einer Nullmenge z.B. durchaus  $\pm\infty$  sein könnte.

**Beweis.** (Skizze)

Hauptsächlich nutzen wir die Monotonie des Integrals (nach Satz 14.15) aus. Betrachte

$$\left| \int_A f d\alpha \right| = \left| \int_A f_+ - f_- d\alpha \right| \leq \int_A f_+ d\alpha + \int_A f_- d\alpha \stackrel{14.15}{=} \int_A f_+ + f_- d\alpha = \int_A |f| d\alpha$$

Die Normeigenschaften folgen ebenfalls aus der Monotonie und den Normeigenschaften des Betrages in  $\mathbb{R}$ . □

**Satz 14.23**  $C_0^0(\mathbb{R}^N)$  liegt dicht in  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$ , d.h. jede Funktion aus  $L^1(\mathbb{R}^N)$  kann als Grenzwert einer Funktion aus  $C_0^0(\mathbb{R}^N)$  dargestellt werden.

**Beweis.** Wir benutzen die folgenden Argumente:

- (a) Liegt  $A$  dicht in  $B$  und  $b$  dicht in  $C$ , dann liegt  $A$  auch dicht in  $C$ .
- (b) Liegt  $A$  dicht in  $B$  so liegt  $\text{span}(A)$  dicht in  $\text{span}(B)$ .

1. Wir wissen: Der Raum der Treppenfunktionen  $\mathfrak{T}$  liegt dicht in  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  nach Lemma 14.11
2. Jede Treppenfunktion  $t \in \mathfrak{T}$  ist von der Form

$$t = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k \in \mathfrak{S}_F$$

nach (b) reicht es aus alle  $\chi_M$  mit  $M \in \mathfrak{S}_F$  zu approximieren.

3. Nach Definition des Lebesgue-Maßes  $\lambda_N$  gibt es eine Folge  $T_k$  aus

$$\mathfrak{R} = \overset{\circ}{\mathfrak{R}} = \left\{ \bigcup_{j=1}^J Q_j \mid Q_j \text{ sind Quader im } \mathbb{R}^N \right\}$$

mit  $d(T_k, M) \rightarrow 0$ . Nach (a) und (b) genügt es statt  $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  alle  $\chi_Q$  für Quader  $Q \subset \mathbb{R}^N$  zu approximieren.

4. Für  $Q = Q[a, b] = Q[a_1, b_1] \times \dots \times Q[a_N, b_N]$  gilt

$$\chi_{Q[a,b]}(x) = \chi_{Q[a_1,b_1]}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{Q[a_N,b_N]}(x_N)$$

Definiere

$$\mathfrak{X}_{n,\delta}(x_n) := \begin{cases} 0 & \text{für } x_n < a_n - \delta \\ 1 + \frac{a_n - x_n}{\delta} & \text{für } a_n - \delta \leq x_n < a_n \\ 1 & \text{für } a_n \leq x_n \leq b_n \\ 1 - \frac{b_n - x_n}{\delta} & \text{für } b_n < x_n \leq b_n + \delta \\ 0 & \text{für } x_n > b_n + \delta \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{X}_\delta := \mathfrak{X}_{1,\delta}(x_1) \cdot \dots \cdot \mathfrak{X}_{N,\delta}(x_N)$$

Nach Konstruktion gelten dann  $\mathfrak{X}_\delta \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$  und  $0 \leq \mathfrak{X}_\delta - \chi_Q \leq 1$  sowie

$$\text{supp}(\mathfrak{X}_\delta - \chi_Q) = Q[a - \delta \mathbb{1}, b + \delta \mathbb{1}] \setminus Q(a, b) =: \tilde{Q} \setminus Q_0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{X}_\delta - \chi_Q|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathfrak{X}_\delta - \chi_Q) d\lambda_N \leq \int_{\tilde{Q} \setminus Q_0} 1 d\lambda_N \\ &= \prod_{n=1}^N (b_n - a_n + 2\delta) - \prod_{n=1}^N (b_n - a_n) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

### Definition und Lemma 14.24 (Würfel, Würfelnetz)

Seien  $X, Y \subset \mathbb{R}^N$  Teilmengen, dann gelten

(1) Ist  $G : X \rightarrow Y$  Lipschitz-stetig, dann bildet  $G$  Nullmengen auf Nullmengen ab.

(2) Ist  $F : Y \rightarrow X$  ein Homöomorphismus, und  $F^{-1} : X \rightarrow Y$  bildet Nullmengen auf Nullmengen ab, dann ist  $f \circ F : Y \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbar, wenn  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbar ist.

Wir definieren einen Würfel im  $\mathbb{R}^N$  durch

$$W := Q[a, a + \delta \cdot \mathbb{1}] = Q[m - \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}, m + \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}]$$

mit  $a \in \mathbb{R}^N$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_+$  und  $m := a + \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}$ . Weiter nennen wir

$$\mathbb{W}_M := \left\{ W_{M,z} := Q[z \cdot 2^{-M}, (z + \mathbb{1}) \cdot 2^{-M}] \mid z \in \mathbb{Z}^N \right\}$$

ein Würfelnetz mit Kantenlänge  $2^{-M}$ .

**Beweis. (Skizze)**

1. Zeige:  $\lambda_N(G(W)) \leq (L \cdot \sqrt{N})^N \cdot \lambda_N(W)$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$  zu  $G$ .

2. Für jeden Quader  $Q = Q[a, b] \subset \mathbb{R}^N$  gilt

$$Q \subset \bigcup_{\substack{W_{M,z} \in \mathbb{W}_M \\ W_{M,z} \cap Q \neq \emptyset}} W_{M,z} \subset Q[a - 2^{-M}, b + 2^{-M}]$$

und demnach gilt

$$\lambda_N(Q) = \prod_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \sum_{n=1}^N \lambda_N(W_{M,z}) \leq \prod_{n=1}^N (b_n - a_n + 2 \cdot 2^{-M}) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \lambda_N(Q)$$

Zu jedem Quader  $Q$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es also endlich viele Würfel  $W_j$  mit  $j = 1 \dots J$  derart, dass gelten

$$Q \subset \bigcap_{j=1}^J W_j \quad \text{und} \quad \lambda_N(Q) \leq \sum_{j=1}^J \lambda_N(W_j) < \lambda_N(Q) + \varepsilon$$

3. Sei eine Nullmenge  $A$  und  $\varepsilon_1$  gegeben, dann gibt es Quader  $Q_k$  mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_N(Q_k) < \frac{\varepsilon_1}{2 \cdot C^N} =: D \quad \text{mit} \quad C := L \cdot \sqrt{N}$$

Wähle nun nach 2. zu  $Q := Q_k$  und  $\varepsilon := D \cdot 2^{-k}$  die Würfel  $W_{j,k}$ , dann folgt

$$G(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{J_k} G(W_{j,k}) \implies \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_N(G(Q_k)) \leq C^N \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_N(Q_k) + \varepsilon) < \varepsilon$$

4. Für den nachweis von (2) betrachte

$$\{y | f \circ F(y) > \alpha\} = F^{-1}(\{x | f(x) > \alpha\}) =: F^{-1}(M)$$

Wir wissen, dass wir jede messbare Menge als  $M = B \setminus N$ , mit einer Borell-Menge  $B$  und einer Nullmenge  $N$ , darstellen können, somit folgt

$$F^{-1}(M) = F^{-1}(B) \setminus F^{-1}(N)$$

wobei  $F^{-1}(B)$  wieder eine Borellmenge ist, da  $F$  ein Homöomorphismus ist. □

## 14.4 Die Konvergenzsätze und die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(A)$

**Im Folgenden** seien

- $(X, \mathcal{G}, \mu)$  ein Maßraum
- $A \subset X$  eine meßbare Teilmenge von  $X$  und
- $f, f_k : A \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbare Funktionen.

**Satz 14.25** (Lemma von Fatou)

Für meßbare Funktionen  $f_k : A \rightarrow [0, \infty]$  gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \geq \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

**Beweis.** Für  $K \in \mathbb{N}$  und  $l \geq K$  gilt

$$f_l \geq \inf_{k \geq K} f_k =: F_k \nearrow \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$$

und daher folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\int_A f_j d\mu \geq \int_A \inf_{k \geq K} f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

□

**Satz 14.26** (Satz von Lebesgue / Satz von der beschränkten Konvergenz)

Seien die Funktionen  $f_k, g : A \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  meßbar mit

$$\int_A |g| d\mu < \infty \quad \text{und} \quad f_k \rightarrow f \text{ punktweise fast überall}$$

Weiter gelte für alle  $k$  fast überall  $|f_k| \leq g$ , dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

**Beweis.** Nach dem soeben gezeigtem Lemma von Fatou (Satz 14.25) gelten

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A (g - f_k) d\mu \geq \int_A (g - f) d\mu \quad (1)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A (g + f_k) d\mu \geq \int_A (g + f) d\mu \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A (g - f_k) d\mu &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[ \int_A g d\mu - \int_A f_k d\mu \right] \\ &= \int_A g d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \end{aligned}$$

Demnach folgt aus (1)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \int_A g d\mu - \int_A (g - f) d\mu = \int_A f d\mu \quad (3)$$

und entsprechend aus (2)

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \geq - \int_A g d\mu + \int_A (g + f) d\mu = \int_A f d\mu \quad (4)$$

Die Kombination von (3) und (4) liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 14.27**  $\mathfrak{L}(A)$  ist vollständig bezüglich  $|\cdot|_1$ .

Genauer heißt dies: Zu jeder Cauchyfolge  $(f_k)$  aus  $\mathfrak{L}(A)$ , also

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k, l \geq K \quad |f_k - f_l|_1 < \varepsilon$$

gibt es ein  $f \in \mathfrak{L}(A)$  mit  $|f_k - f|_1 \rightarrow 0$ . Zusätzlich kann eine Teilfolge  $g_k := f_{\pi(k)}$  so ausgewählt werden, dass gelten

$$g_k \rightarrow f \quad \text{punktweise fast überall} \quad (1)$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists Z \in \mathfrak{G}_F \quad \mu(Z) < \delta \quad \text{und} \quad g_k|_Z \rightarrow f|_Z \text{ gleichmäßig} \quad (2)$$

**Beweis.** (Skizze)

Eine Cauchyfolge konvergiert, wenn auch nur eine Teilfolge konvergiert<sup>1</sup>. Die Teilfolge  $g_k$  wählen wir mit Hilfe des Konvergenzbeschleunigungssatzes (Lemma 14.28 s.u.) aus. Für eine positive Nullfolge

<sup>1</sup> Vergl. Analysis I

$(\beta_k)$  wählen wir die Teilfolge  $g_k := f_{\pi(k)}$  mit  $|g_{k+1} - g_k| < \beta_k$ . Mit einer weiteren positiven Nullfolge  $(\alpha_k)$  sei

$$Y_k := \left\{ x \in A \mid |g_{k+1}(x) - g_k(x)| > \alpha_k \right\}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} \alpha_k \cdot \mu(Y_k) &= \int_{Y_k} \alpha_k d\mu < |g_{k+1} - g_k|_1 < \beta_k \\ Z_K &:= \bigcup_{k=K}^{\infty} Y_k \supset Z_{K+1} \\ Z &:= \bigcap_{K=1}^{\infty} Z_K \end{aligned}$$

Dann folgt sofort

$$\mu(Z_K) \leq \sum_{k=K}^{\infty} \mu(Y_k) \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k}$$

An  $(\alpha_k)$  und  $(\beta_k)$  stelle die Bedingungen, dass die Reihen über die  $\alpha_k, \beta_k \frac{\beta_k}{\alpha_k}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren<sup>2</sup>, dann konvergiert  $\mu(Z_K)$  für  $K \rightarrow \infty$  gegen Null und daher ist auch  $\mu(Z) = 0$ .

Für  $x \notin Z_K$  folgt für alle  $k \geq K$  aus  $x \notin Y_k$ , dass  $|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \alpha_k$  ist und damit ist  $g_k|_{Z_K}$  eine gleichmäßige Cauchyfolge.

Für  $x \notin Z$  gibt es ein  $K$  mit  $x \notin Z_K$  dann ist  $g_k(x)$  immer noch eine Cauchyfolge<sup>3</sup>.

Hiermit haben wir eine fast überall definierte und nach Lemma 14.4 meßbare Grenzfunktion und die Zusatzbehauptungen (1) und (2) sind erfüllt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} |g_k| d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A |g_k| d\mu \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |g_k|_1 < \infty \end{aligned}$$

Also kann nur auf einer Nullmenge  $|f(x)| = +\infty$  gelten. Ersetze dort  $\infty$  durch einen endlichen Wert, dann ist  $f \in \mathcal{L}(A)$  und schließlich gilt:

$$\begin{aligned} |f - g_k|_1 &= \int_A \liminf_{l \rightarrow \infty} |g_l - g_k| d\mu \\ &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} |g_l - g_k|_1 < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K \end{aligned}$$

□

**Lemma 14.28** (Konvergenzbeschleunigungssatz)

Zu jeder Cauchyfolge  $x_k$  in einem metrischen Raum  $(M, d)$  und zu jeder Nullfolge  $(\beta_k)$  aus  $\mathbb{R}_+$  gibt es eine Teilfolge  $x_{\pi(k)}$  so dass für alle  $k$  gilt

$$d(x_{\pi(k+1)}, x_{\pi(k)}) < \beta_k$$

<sup>2</sup>z.B. mit  $\beta_k := 4^{-k}$  und  $\alpha_k := 2^{-k}$  sind diese Bedingungen erfüllt.

<sup>3</sup>Die Konvergenz ist aber vielleicht nicht mehr gleichmäßig, weil  $K$  von  $x$  abhängen kann.

**Beweis. (Idee)**

Für alle Cauchyfolgen gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k, l \geq K \quad d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad (1)$$

Damit ist der Rekursionsanfang klar, denn wähle  $\varepsilon := \beta_1$  hierzu  $K$  und setze  $\pi(1) := K$ , so folgt die Behauptung für  $k = 1$ . Fahre nun so fort...

**Im Folgenden** seien  $(X, \mathfrak{G}, \mu)$  ein Maßraum und  $A \in \mathfrak{G}$ .

**Satz 14.29** Seien  $\mu(A) < \infty$  und  $(f_l)$  eine Folge in  $\mathfrak{L}(A)$ . Dann gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_A f_l d\mu = \int_A \lim_{l \rightarrow \infty} f_l d\mu$$

*falls die Folge  $(f_l)$  gleichmäßig konvergiert.*

**Beweis.** Definiere  $f$  als den Grenzwert der Folge  $(f_l)$ , dann gilt

$$\left| \int_A f_l d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f_l - f| d\mu \leq \mu(A) \cdot \sup_{x \in A} |f_l(x) - f(x)| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

□

**Satz 14.30** (stetige Parameterabhängigkeit von Integralen)

Sei  $\Omega$  ein metrischer Raum und  $f : \Omega \times A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit den Eigenschaften  $f(\cdot, x) \in C^0(\Omega)$  für fast alle  $x \in A$  sowie für alle  $p \in \Omega$  soll  $f(p, \cdot)$  messbar sein. Weiter gelte

$$\exists g \in \mathfrak{L}(A) \quad \forall p \in \Omega \quad |f(p, x)| \leq |g(x)| \text{ für fast alle } x \in A$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \int_A f(p, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

stetig.

**Beweis. (Idee)**

Da  $\Omega$  ein metrischer Raum ist zeige die Folgenstetigkeit von  $F$  mit

$$p_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} p \quad \text{und} \quad \tilde{f}_l := f(p_l, \cdot) \quad \text{und} \quad \tilde{f} := f(p, \cdot)$$

Nutze nun die Voraussetzungen aus und schließe mit dem Satz von Lebesgue auf die Behauptung.

**Satz 14.31** (differenzierbare Parameterabhängigkeit von Integralen)

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  und  $f : \Omega \times A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den Eigenschaften

1. für fast alle  $x \in A$  ist  $f(\cdot, x) \in C^1(\Omega)$
2. Für alle  $p \in \Omega$  und für alle  $n = 1..N$  ist  $\partial_{p_n} f(p, \cdot)$  meßbar
3. Es gibt ein  $g \in \mathcal{L}(A)$  so dass für alle  $p \in \Omega$  und für alle  $n = 1..N$  die folgende Ungleichung für fast alle  $x \in A$  gilt:  $|\partial_{p_n} f(p, x)| \leq g(x)$

Dann ist die Funktionen

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \int_A f(p, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

stetig diff'bar mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_n F(p) = \int_A \partial_{p_n} f(p, x) d\mu(x) \quad \text{für } n = 1..N$$

**Beweis.** (Idee)

Benutze den Mittelwertsatz und den Satz von Lebesgue. Anschließend zeige die Stetigkeit aller partiellen Ableitung mit Satz 14.30.

**Satz 14.32** (Verbindung von Lebesgue- und uneigentlichem Riemann-Integral)

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  über alle abgeschlossenen Teilintervalle von  $(a, b)$  Riemann-Integrierbar, dann gilt:  $f$  gehört genau dann zum Raum  $\mathcal{L}(A)$  der Lebesgue-Integrierbaren Funktionen, falls das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

in  $\mathbb{R}$  existiert. Ferner existiert dann auch das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b f(t) dt$$

und dieses ist dem Lebesgue-Integral von  $f$  über  $(a, b)$  gleich.

**Beweis.** (Skizze)

Sei zunächst  $f \in \mathcal{L}(A)$ , dann gelten für alle Folgen  $a_l \searrow a$  und  $b_l \nearrow b$  aus  $\mathbb{R}$

$$f_l := \chi_{(a_l, b_l)} \cdot f \longrightarrow f \text{ punktweise fast überall} \quad \text{und } |f_l| \leq |f| =: g \in \mathcal{L}((a, b))$$

so dass mit dem Satz von Lebesgue und dem Satz 14.12 die Aussage folgt.

Gelte nun für das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty$$

dann liefert Satz 14.12 eine Folge  $(f_l) \subset \mathcal{L}((a, b))$ , deren Grenzwert  $f$  punktweise fast überall ist. Damit ist  $f$  meßbar und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und Satz 14.12 folgt die Aussage.  $\square$

## 14.5 Der Transformationssatz

**Satz 14.33** (Substitutionsregel II / Transformationssatz)

Seien  $U, V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus<sup>4</sup>, dann gilt:  $f$  gehört genau dann zu  $\mathcal{L}(V)$ , wenn  $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$  zu  $\mathcal{L}(U)$  gehört und es gilt

$$\int_V f d\lambda_N = \int_U f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')| d\lambda_N$$

Es kann  $\Phi'$  durch  $J_\Phi$  die Jakobimatrix von  $\Phi$  ersetzt werden, denn es gilt  $\det(J_\Phi) = \det(\Phi')$ .

**Merkregel:** Man kann sich die Formel im obigen Satz als Tausch von Variablen  $y = \Phi(x)$  vorstellen. Wie im  $\mathbb{R}$  gibt es hier eine einfache Merkregel, nämlich:

$$dy = |\det(J_\Phi(x))| dx$$

Für die Transformation

$$\int_V f(y) d\lambda_N(y) = \int_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det(\Phi'(x))| d\lambda_N(x)$$

Die Transformation  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der Borelgebren. Nimmt man für  $f$  die charakteristische Funktion  $\chi_{\Phi(\Omega)}$  einer meßbaren Menge  $\Omega \subset U$ , dann besagt der Transformationssatz

**Beweis.** Der Beweis des Transformationssatzes folgt weiter unten.

**Bemerkung** (Maßtransformation im  $\mathbb{R}^N$ )

Sei  $U \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge, dann gilt meßbare Mengen  $\Omega \subset U$

$$\lambda_N(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det(\Phi')| d\lambda_N$$

**Beweis.** Folgt unmittelbar aus 14.33

**Erinnerung** Für eine offene Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  definierten wir

$$C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{l=1}^{\infty} C_0^l(\Omega) \quad \text{und} \quad C_0^l(\Omega) := \{f \in C^l(\Omega) \mid \text{supp}(f) \Subset \Omega\}$$

**Definition 14.34** (Glättungsoperatoren)

Die Funktion  $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  habe die Eigenschaften

$$\sigma \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \sigma d\lambda_N = 1$$

Dann nennen wir die für alle  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  und alle  $\varepsilon > 0$  durch

$$S_\varepsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon(x-y) f(y) d\lambda_N(y) \quad \text{mit} \quad \sigma_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-N} \cdot \sigma\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

<sup>4</sup> D.h.  $\Phi$  ist bijektiv und  $\Phi, \Phi^{-1}$  sind stetig diff'bar

definierte lineare Abbildung  $S_\varepsilon$  den (durch  $\sigma$  bestimmten) Glättungsoperator. Ist  $f$  nur auf einer meßbaren Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  definiert und integrierbar, so wird entsprechend

$$S_\varepsilon(f) := \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(x-y)f(y) d\lambda_N(y) = S_\varepsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon(x-y)f(y) \cdot \chi_\Omega d\lambda_N(y)$$

definiert. Wir schreiben auch  $S_\varepsilon f =: \sigma_\varepsilon * f$  und nennen  $\sigma_\varepsilon * f$  die Faltung von  $\sigma_\varepsilon$  und/mit  $f$ .

**Lemma 14.35** Es gibt eine Funktion  $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  mit

$$\sigma \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{supp}(\sigma) \subset K_1(0) \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \sigma d\lambda_N = 1$$

Für  $\sigma_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  gelten dann

$$\sigma_\varepsilon \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{supp}(\sigma_\varepsilon) \subset K_\varepsilon(0) \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon d\lambda_N = 1$$

**Beweis.** (Skizze)

Die nichtnegativen Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{t}) & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zu  $C^\infty(\mathbb{R})$  und hat ihren Träger in  $[0, \infty)$ . Definiere nun

$$g(t) := f(t) \cdot f(1-t)$$

Diese ist beliebig oft diff'bar und hat ihren Träger in  $[0, 1]$  welches kompakt in  $\mathbb{R}$  liegt. Betrachte nun

$$\tilde{\sigma} := g(|\cdot|^2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N) \quad \text{und} \quad c := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\sigma} d\lambda_N \quad \text{und definiere} \quad \sigma := c^{-1} \cdot \tilde{\sigma}$$

Nach dieser Konstruktion hat  $\sigma$  die geforderten Eigenschaften und mit Satz 14.23 folgt der Rest der Behauptung.  $\square$

**Lemma 14.36** (Eigenschaften der Glättungsoperatoren)

Sei ohne Einschränkung<sup>5</sup>  $\text{supp}(\sigma) \subset K_1(0)$  für ein  $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Es gelten

1. Die Glättungsoperatoren

$$\begin{aligned} S_\varepsilon : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N) \\ f &\mapsto S_\varepsilon f = \sigma_\varepsilon * f \end{aligned}$$

sind linear und für alle Multiindizes  $\alpha$  gilt  $\partial^\alpha(S_\varepsilon f) = (\partial^\alpha \sigma_\varepsilon) * f$

2.  $\text{supp}(S_\varepsilon f) \subset \text{supp}(f) + K_\varepsilon(0)$  für  $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$

3. Die Glättungsoperatoren sind monoton, d.h. für  $f, g \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  gilt

$$f \leq g \Rightarrow S_\varepsilon f \leq S_\varepsilon g$$

insbesondere gilt  $m \leq S_\varepsilon f \leq M$ , falls  $m \leq \int f d\lambda_N \leq M$  für  $m, M \in \mathbb{R}$  gilt.

<sup>5</sup> sonst transformiere mit Satz 14.23

4. Die  $S_\varepsilon$  sind gleichmäßig stetig, denn für  $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  gilt  $|S_\varepsilon f|_1 \leq |f|_1$
5. Ist  $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  so konvergiert  $S_\varepsilon f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$  auf allen  $\Xi \in \mathbb{R}^N$
6. Für alle meßbaren Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  und alle Funktionen  $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$  konvergiert  $S_\varepsilon f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$  in  $\mathfrak{L}(\Omega)$  also in der  $|\cdot|_1$ -Halbnorm.

**Beweis.** (Skizze)

Für  $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$  sind die Glättungsoperatoren wohldefiniert, denn  $\sigma_\varepsilon(x - \cdot)f$  gehört zu  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$ .

Zu 1. und 4.: Wegen der Träger von  $\sigma_\varepsilon(x - \cdot)$  und  $f$  gilt mit  $\Xi := K_\varepsilon(x) \cap \text{supp}(f)$

$$S_\varepsilon f(x) = \int_{\Xi} \sigma_\varepsilon(x - y) f(y) d\lambda_N(y)$$

Nach Satz 14.31 gehört  $S_\varepsilon f$  zu  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  und für einen Multiindex  $\alpha$  gilt

$$\partial^\alpha (S_\varepsilon f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (\partial^\alpha \sigma_\varepsilon)(x - y) \cdot f(y) d\lambda_N(y) = ((\partial^\alpha \sigma_\varepsilon) * f)(x)$$

Ferner ist mit dem Satz von Fubini/Tonelli und der Substitution  $z = z(x) = x - y$

$$|S_\varepsilon f|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} 1 \cdot |f(y)| d\lambda_n(y) = |f|_1$$

Damit ist  $S_\varepsilon f$  insbesondere ein Element von  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^N)$ .

Zu 2. Substituiere wieder  $z = z(x) = x - y$  und erhalte

$$S_\varepsilon f(x) = \int_{K_\varepsilon(0)} \sigma_\varepsilon(z) \cdot f(x - z) d\lambda_N(z)$$

Gilt also  $x \notin \text{supp}(f) + K_\varepsilon(0)$  so ist  $x \notin \text{supp}(f) + z$ , d.h.  $f(x - z) = 0$ , für  $z \in K_\varepsilon(0)$

Zu 3. Die Monotonie folgt aus der Monotonie des Integrals, für den insbesondere Teil betrachte Konstante Funktionen  $c$ , diese sind Eigenfunktionen von  $S_\varepsilon$  zum Eigenwert 1, d.h

$$S_\varepsilon c(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon(x - y) c d\lambda_N(y) = c \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon(x - y) d\lambda_N(y) = c \cdot 1$$

Zu 5. Seien  $f$  eine stetige, integrierbare Funktion und  $\Xi \in \mathbb{R}^N$ , dann gilt

$$S_\varepsilon f(x) - f(x) = \int_{K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x - y) \cdot (f(y) - f(x)) d\lambda_N(y) \Rightarrow |S_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in K_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)| \cdot 1$$

Folglich gilt für  $\varepsilon \leq 1$

$$\sup_{x \in \Xi} |S_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \sup \{ |f(y) - f(x)| : x \in \Xi \wedge y \in \mathbb{R}^N \wedge |x - y| \leq \varepsilon \} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

da  $\Xi + K_1(0) \in \mathbb{R}^N$  und  $f$  auf dieser Menge gleichmäßig stetig ist.

Zu 6. Wir verwenden das bereits aus dem Beweis von Satz 14.23 bekannte Prinzip:

(b) Liegt  $A$  dicht in  $B$  so liegt  $\text{span}(A)$  dicht in  $\text{span}(B)$ .

Sowie den nachfolgenden Satz 14.37. Zeige zunächst, dass  $S_\varepsilon f$  in  $\mathfrak{L}(\Omega)$  gegen  $f$  konvergiert, d.h.

$$|S_\varepsilon f - f|_1 = \int_{\Omega} |S_\varepsilon f - f| d\lambda_N \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Nimm dazu ohne Einschränkung an, dass  $\Omega = \mathbb{R}^N$  ( mit  $f := E_0 f$  und  $|\cdot|_{1, \mathbb{R}^N} \geq |\cdot|_{1, \Omega}$  ), dann wende mit **4. Satz 14.37** an. Nimm weiter ohne Einschränkung an, dass  $f \in \mathcal{L}([0, \infty))$  (nach (b) und da  $f^{-1}(\{\infty\})$  eine Nullmenge ist. Weiter seien nach Satz 14.37  $f$  und  $\text{supp}(f)$  beschränkt, sonst konstruiere eine Folge, die  $f$  approximiert nach dem Satz von Lebesgue. Reduziere nun wie bereits bekannt zunächst auf den Fall, dass  $f$  eine Treppenfunktion ist und anschließend auf den Fall, dass  $f = \chi_M$  eine charakteristische Funktion einer meßbaren Menge  $M$  ist.

Nach Definition gibt es nun eine Folge einfacher Mengen  $E_l$  aus  $\mathfrak{R}$ , dem Ring der endlichen disjunkten Vereinigungen von Würfeln. Reduziere also auf den Fall, dass  $f = \chi_W$  eine charakteristische Funktion eines Würfels ist. Dann gilt

$$S_\varepsilon f(x) = \int_{W \cap K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x-y) d\lambda_N(y)$$

Ist  $x \in \text{int}(W)$  ein innerer Punkt, so ist  $f(x) = 1$  und wir können  $\varepsilon$  so klein wählen, dass  $K_\varepsilon(x) \subset W$  ist. Mit solchem  $\varepsilon$  gilt dann

$$S_\varepsilon f(x) = \int_{K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x-y) d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \sigma_\varepsilon(x-y) d\lambda_N(y) = 1$$

Ist  $x$  hingegen ein innerer Punkt des Komplements, d.h.  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{W}$ , so gilt  $f(x) = 0$  und wir können  $\varepsilon$  so klein wählen, dass  $K_\varepsilon(x) \cap W = \emptyset$  ist. Da der Rand des Würfels  $\partial W$  eine Nullmenge ist, konvergiert  $S_\varepsilon f$  punktweise fast überall gegen  $f$ . Der Satz von Lebesgue liefert schließlich die Behauptung.  $\square$

**Satz 14.37** (Konsistenz und Stetigkeit impliziert Konvergenz)

Seien  $X, Y$  normierte Räume und  $\phi, \phi_\nu : X \rightarrow Y$  stetige lineare Operatoren von  $X$  nach  $Y$ , d.h. es gibt positive Konstanten  $c$  und  $c_\nu$  so dass für alle  $x \in X$  gelten

$$|\phi x|_Y \leq c \cdot |x|_X \quad \text{und} \quad |\phi_\nu x|_Y \leq c_\nu \cdot |x|_X$$

Ferner sei  $D$  eine dichte Teilmenge von  $X$ , dann folgt aus der Stabilität, d.h.

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall \nu \quad \forall x \in X \quad |\phi_\nu x|_Y \leq \gamma \cdot |x|_X$$

und der Konsistenz, d.h.

$$\forall x \in D \quad \phi_\nu x \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \phi x$$

die Konvergenz, d.h.

$$\forall x \in X \quad \phi_\nu x \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \phi x$$

**In Worten:** Konvergenz auf einer dichten Teilmenge und gleichmäßige Beschränktheit der linearen Operatoren impliziert die Konvergenz auf dem gesamten Raum.

**Beweis.** Seien  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben, dann wähle ein  $d \in D$  mit

$$|x - d|_X \leq \varepsilon \cdot \min\left\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{c}\right\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\phi_\nu x - \phi x|_Y &\leq |\phi_\nu x - \phi d|_Y + |\phi_\nu d - \phi d|_Y + |\phi_\nu d - \phi x|_Y \\ &\leq \gamma \cdot |x - d|_X + |\phi_\nu d - \phi d|_Y + c \cdot |x - d|_X \\ &\leq 2\varepsilon + |\phi_\nu d - \phi d|_Y \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 2\varepsilon \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war folgt die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 14.38** (Dichtheit in  $\mathfrak{L}$ )

Die folgenden Funktionenräume liegen bezüglich der  $|\cdot|_1$ -Halbnorm dicht in  $\mathfrak{L}(A)$ :

- $\mathfrak{L}(A) \cap C^\infty(A)$
- beschränkte Funktionen mit kompaktem Träger
- Treppenfunktionen
- Treppenfunktionen von Würfeln

**Beweis.** Reduktionen im Beweis von Satz 14.36 6. □

**Folgerung 14.39** (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  und  $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ , dann gilt

$$f = 0 \text{ f.ü.} \iff \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \int_{\Omega} f \varphi d\lambda_N = 0$$

Man kann also das Verschwinden von  $f$  (fast überall) testen, indem man  $f$  gegen alle „Testfunktionen“ aus  $C_0^\infty(\Omega)$  integriert und das Verschwinden all dieser Integrale zeigt.

**Beweis.** Für  $x \in \Omega$  und einem hinreichend kleinem  $\varepsilon > 0$  ist  $\sigma_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$ , denn  $\text{supp}(\sigma_\varepsilon(x - \cdot)) = K_\varepsilon(x)$ . Daher folgt für solche  $\varepsilon$  nach Voraussetzung  $S_\varepsilon f(x) = 0$ . Weiter konvergiert  $S_\varepsilon f$  gegen  $f$  in  $\mathfrak{L}(\Omega)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , daher folgt

$$|f|_1 = |f - S_\varepsilon f|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

□

**Satz 14.40** ( $C_0^\infty$  liegt dicht in  $\mathfrak{L}$ )

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge, dann liegt  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $\mathfrak{L}(\Omega)$  bezüglich der  $|\cdot|_1$ -Halbnorm.

**Beweis.** (Skizze)

Betrachte die offenen Mengen

$$\Omega_l := \left\{ x \in \Omega \mid |x| < l \text{ und } \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \frac{1}{l} \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

Für diese gilt

$$\Omega_l \subset \overline{\Omega}_l \Subset \Omega_{l+1} \subset \dots \Subset \Omega \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Omega_l$$

wobei der Abschluss  $\overline{\Omega}_l$  von  $\Omega_l$  kompakt ist. Definiere nun  $f_l := \chi_{\Omega_l} \cdot f \in \mathfrak{L}(\Omega)$  dann folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$|f_l - f|_1 = \int_{\Omega} |f_l - f| d\lambda_N \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \quad \text{punktweise fast überall}$$

Nimm also o.B.d.A. an, dass für den Träger von  $f$  gilt  $\text{supp}(f) \subset \Omega_l \Subset \Omega$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ . Weiter konvergieren  $S_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  in  $\mathfrak{L}(\Omega)$  gegen  $f$  und  $\text{supp}(S_\varepsilon f) \subset \Omega + K_\varepsilon(0)$  nach Lemma 14.36 (vi) und (ii). Ist nun

$$\varepsilon < \frac{1}{l(l+1)}$$

so liegt der Träger von  $S_\varepsilon f$  in  $\Omega_{l+1} \Subset \Omega$ . Für solch kleine  $\varepsilon$  gilt dann sogar

$$S_\varepsilon f \in C_0^\infty(\Omega)$$

□

**Satz 14.33** (Substitutionsregel II / Transformationssatz)

Seien  $U, V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus<sup>6</sup>, dann gilt:  $f$  gehört genau dann zu  $\mathcal{L}(V)$ , wenn  $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$  zu  $\mathcal{L}(U)$  gehört und es gilt

$$\int_V f d\lambda_N = \int_U f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')| d\lambda_N$$

Es kann  $\Phi'$  durch  $J_\Phi$  die Jakobimatrix von  $\Phi$  ersetzt werden, denn es gilt  $\det(J_\Phi) = \det(\Phi')$ .

**Merkregel:** Man kann sich die Formel im obigen Satz als Tausch von Variablen  $y = \Phi(x)$  vorstellen. Wie im  $\mathbb{R}$  gibt es hier eine einfache Merkregel, nämlich:

$$dy = |\det(J_\Phi(x))| dx$$

Für die Transformation

$$\int_V f(y) d\lambda_N(y) = \int_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det(\Phi'(x))| d\lambda_N(x)$$

Die Transformation  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der Borelalgebren. Nimmt man für  $f$  die charakteristische Funktion  $\chi_{\Phi(\Omega)}$  einer meßbaren Menge  $\Omega \subset U$ , dann besagt der Transformationssatz

**Beweis.** (Skizze)

Die Rückrichtung des „genau dann, wenn“ im Satz wird durch die Rücktransformation mit  $\Phi^{-1}$  bewiesen, daher ist nur die Hinrichtung zu zeigen. Reduziere dazu auf den linearen Fall:

1. Reduziere auf  $f \in C_0^\infty(V)$

Nach Satz 14.40 gibt es eine Folge  $(f_l) \subset C_0^\infty(V)$ , die in  $\mathcal{L}(V)$  gegen  $f$  konvergiert. Mit Satz 14.27 gibt es eine Teilfolge, die punktweise fast überall gegen  $f$  konvergiert. Die an  $f$  gestellten Anforderungen werden mit Lemma 14.24 an  $f_l \circ \Phi$  vererbt.

2. Reduziere auf Würfel im  $\mathbb{R}^N$

Schöpfe mit der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 14.40  $U$  durch offene Mengen  $U_l$  aus und definiere

$$K := \phi^{-1}(\text{supp}(f)) \Subset U$$

Da  $K$  kompakt ist wähle aus der offenen Überdeckung der  $U_l$  eine endliche Teilüberdeckung von  $K$  aus. Da die  $U_l$  geschachtelt sind gilt dann  $K \subset U_L$  mit  $L \in \mathbb{N}$ . Überdecke  $U$  nun mit dem Würfelnetz  $\mathbb{W}_i$  mit der Kantenlänge  $2^{-i}$ , dann liegen, für hinreichend großes  $i$  alle Würfel  $W \in \mathbb{W}_i$ , die mit  $K$  nichtleeren Schnitt haben in  $U_{2L}$ . Lokalisierere nun unter der Annahme

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \quad \forall i > I \quad \forall W \in \mathbb{W}_i: K \cap W \neq \emptyset \quad \left| \int_{\Phi(W)} f d\lambda_N - \int_W f \circ \Phi |\det(\Phi')| d\lambda_N \right| \leq \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

3. Zeige die in 2. gemachte Annahme.

Hierzu nimm o.B.d.A. an, dass  $W = K_{2^{-i-1}}^\infty(0)$  die Kugel bezüglich der Maximumsnorm um den Punkt 0 mit Radius  $2^{-i}$  ist und  $\Phi(0) = 0$  gilt. Da  $f$  und  $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$  gleichmäßig stetig sind folgt für hinreichend große  $i$

$$\left| \int_{\Phi(W)} f d\lambda_N - \int_W f \cdot \Phi \cdot |\det(\Phi')| d\lambda_N \right| \leq \frac{2}{3} \varepsilon \cdot \lambda_N(W) + c \cdot |\lambda_N(\Phi(W)) - |\det(\Phi')| \cdot \lambda_N(W)|$$

<sup>6</sup> D.h.  $\Phi$  ist bijektiv und  $\Phi, \Phi^{-1}$  sind stetig diff'bar

Mit der Schranke  $c > 0$ , die  $\Phi, \Phi'$  bzw  $f, \Phi^{-1}, (\Phi^{-1})'$  auf  $\overline{U_{2L}}$  beschränkt. Wegen  $\det(\Phi'(0)) \neq 0$  ist die konstante lineare Abbildung  $\Phi'(0)$  regulär und wir können

$$\varphi := \Phi'(0)^{-1}\Phi$$

definieren. Es gelten  $\Phi = \Phi'(0)\varphi$  und  $\varphi' = \Phi'(0)^{-1}\Phi'$  somit folgen

$$\varphi(0) = 0 \text{ und } \varphi'(0) = \Phi'(0)^{-1}\Phi'(0) = id$$

Da sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi'$  gleichmäßig stetig sind gilt

$$\sup_{x \in W} \|\varphi'(x) - id\| \leq \kappa < 1$$

Mit Lemma 14.41 (s.u.) folgt dann mit  $W = K_{2^{-i-1}}^\infty$

$$(1 - \kappa)^N \cdot \lambda_N(W) \leq \lambda_N(\varphi(W)) \leq (1 + \kappa)^N \cdot \lambda_N(W)$$

Mit Lemma 14.21 (Substitutionsregel I) können wir dies zu

$$(1 - \kappa)^N \cdot |\det(\Phi'(0))| \cdot \lambda_N(W) \leq \lambda_N(\Phi(W)) \leq (1 + \kappa)^N \cdot |\det(\Phi'(0))| \cdot \lambda_N(W)$$

umformen. Mit der Bernoullischen Ungleichung  $(1 - \kappa)^N \geq 1 - N\kappa$  und der binomischen Formel für  $(1 + \kappa)^N$  erhalten wir

$$|\lambda_N(\Phi(W)) - |\det(\Phi'(0))| \cdot \lambda_N(W)| \leq \kappa c_N \cdot \lambda_N(W) \leq \frac{1}{3c} \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

Mit hinreichend kleinem  $\kappa$  und hinreichend großem  $I$  ist die Annahme aus **2.** und damit der Satz bewiesen. □

**Lemma 14.41** Seien  $\rho > 0$  und  $K_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N$  sowie  $\varphi \in C^1(K_\rho(0), \mathbb{R}^N)$  mit  $\varphi(0) = 0$  gegeben. Weiter gelte

$$\sup_{z \in K_\rho(0)} \|\varphi'(z) - id\| \leq \kappa < 1$$

Dann gilt für alle  $0 < r < \rho$

$$K_{(1-\kappa)r}(0) \subset \varphi(K_r(0)) \subset K_{(1+\kappa)r}(0)$$

**In Worten:** Ist die Ableitung naher der Identität, so unterscheidet sich das Bild einer Kugel nur wenig von sich selbst.

**Beweis.** (Idee)

Die rechte Inklusion folgt direkt aus der Mittelwertabschätzung. Für die linke Inklusion sei  $y \in K_{(1-\kappa)r}(0)$  und betrachte

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x) := x - \varphi(x) + y = x$$

und wende den Banachschen Fixpunktsatz an. □

**Lemma 14.42** (Sardsches Lemma)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eine offenen Teilmenge und  $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , dann ist die Menge der kritischen Werte von  $\phi$ , d.h. das Bild der Kritischen Punkte von  $\phi$ , eine Nullmenge. Also

$$\lambda_N(\phi(K)) = 0 \quad \text{mit } K := \{x \in \Omega \mid \det(\phi'(0)) = 0\}$$

**Beweis.** (Skizze)

Schöpfe wie in den Beweisen der Sätze 14.33 und 14.40  $\Omega$  mit offenen Mengen  $\Omega_l$  aus, dann gelten

$$\phi(\Omega) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \phi(\Omega_l) \quad \text{und} \quad \phi(K) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \phi(K \cap \Omega_l)$$

Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind genügt es  $\lambda_N(\phi(K \cap \Omega_l)) = 0$  für ein festes  $l \in \mathbb{N}$  zu zeigen. Lege hierzu wieder das Würfelnetz  $\mathbb{W}_i$  über  $\Omega$ , so dass  $W \subset \Omega_{2L}$  für alle  $W \in \mathbb{W}_i$  mit  $W \cap \Omega_l \neq \emptyset$  gilt. Auf der kompakten Menge  $\overline{\Omega_{2L}}$  sind  $\phi$  und  $\phi'$  gleichmäßig stetig und beschränkt. Insbesondere ist  $\phi$  also Lipschitz mit der Konstanten  $\gamma$ .

Wie im Beweis zu Satz 14.33 lokalisierere unter der Annahme

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \quad \forall i > I \quad \forall W \in \mathbb{W}_i: W \cap \Omega_l \neq \emptyset \quad \lambda_N(\phi(W \cap K)) \leq \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

Um diese Annahme zu zeigen wähle ein  $\hat{x} \in W \cap K$ , dann gilt für  $x \in W$  und  $\varphi(t) := tx + (1-t)\hat{x} \in [\hat{x}, x] \subset W$  die folgenden Abschätzung

$$|\phi(x) - \phi(\hat{x}) - \phi'(\hat{x})(x - \hat{x})| \leq \sqrt{N \cdot 2^{-i}} \cdot \sup_{|z - \hat{x}| \leq \sqrt{N} 2^{-i}} \|\phi'(z) - \phi'(\hat{x})\| =: \sqrt{N \cdot 2^{-i}} \cdot \delta_i$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\phi'$  gilt  $\delta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ . Definiere

$$V := \{ \phi'(\hat{x})v \mid v \in \mathbb{R}^N \}$$

Weil  $\hat{x}$  ein kritischer Punkt von  $\phi$  ist, ist  $\det(\phi'(\hat{x})) = 0$ , also folgt  $\dim(V) =: M < N$ . Wähle nun eine Orthogonalbasis (ONB)  $\{v^1, \dots, v^M\}$  von  $V$  und ergänze diese durch  $\{u^1, \dots, u^{N-M}\}$  zu einer ONB des  $\mathbb{R}^N$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \phi(\hat{x}) + \sum_{m=1}^M \alpha_m v^m + \sum_{m=1}^{N-M} \beta_m u^m \end{aligned}$$

ist ein globaler  $C^\infty$ -Diffeo. und wir können jedes  $y \in \phi(W)$  durch  $y = \phi(x) = \psi(\alpha, \beta)$  mit  $x \in W$  darstellen. Nach Pythagoras gilt dann

$$|(\alpha, \beta)|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq \gamma^2 \cdot N \cdot 2^{-2i}$$

Die Koeffizienten  $\beta_m$  können wir wegen der Orthonormalität mit Taylor noch schärfer abschätzen durch

$$|\beta_m| \leq \sqrt{N} \cdot 2^{-i} \delta_i$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$|\alpha| \leq \gamma \sqrt{N} 2^{-i} \quad \text{und} \quad |\beta| \leq \sqrt{N-M} \sqrt{N} 2^{-i} \delta_i \leq \delta_i \cdot N \cdot 2^{-i}$$

und

$$\phi(W) \subset \psi(K_i) \quad \text{mit } K_i := K_{\gamma\sqrt{N}2^{-i}}(0) \times K_{\delta_i N 2^{-i}}(0)$$

Da  $|\det(\alpha, \beta)| = 1$  ist, gilt mit der Maßtransformation im  $\mathbb{R}^N$  (Bemerkung nach Satz 14.33) für alle meßbaren  $A \subset \mathbb{R}^N$

$$\lambda_N(\psi(A)) = \lambda_N(A)$$

folglich erhalten wir mit  $\delta_i \leq 1$  und  $1 \leq N - M$  für alle hinreichend großen  $i$

$$\lambda_N(\psi(W \cap K)) \leq \delta_i \cdot \gamma^M \cdot N^N \cdot \omega_M(1) \cdot \omega_{N-M}(1) \cdot \lambda_N(W) \leq \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

□

**Satz 14.43** (Verallgemeinerte Substitutionsregel im  $\mathbb{R}^N$ )

Seien  $U$  (offen)  $\subset \Omega$  (meßbar)  $\subset \Xi$  (offen)  $\subset \mathbb{R}^N$  sowie  $\Upsilon$  (meßbar)  $\subset \mathbb{R}^N$  Teilmengen des  $\mathbb{R}^N$  und  $\phi \in C^1(\Xi, \mathbb{R}^N)$  mit  $\phi(\Omega) \subset \Upsilon$  sowie  $f : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$  seien meßbare Funktionen. Ferner seien mit

$$K := (\det \phi')^{-1}(\{0\}) = \{x \in \Xi \mid \det(\phi'(x)) = 0\}$$

die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i)  $\Omega \setminus (U \cup K)$  und  $\Upsilon \setminus \phi(\Omega)$  sind Nullmengen und

(ii) Die Abbildung  $\phi|_{U \setminus K}$  ist injektiv.

Dann gilt:  $f$  gehört genau dann zu  $\mathfrak{L}(\Upsilon)$ , wenn  $f \circ \phi \cdot |\det \phi'|$  zu  $\mathfrak{L}(\Omega)$  gehört und es ist

$$\int_{\Upsilon} f d\lambda_N = \int_{\Omega} f \circ \phi \cdot |\det \phi'| d\lambda_N$$

**Beweis.** (Skizze)

Die Bedingungen  $\lambda_N(\Omega \setminus U) = 0$  und  $\lambda_N(\Omega \setminus (U \cup K)) = 0$  sind äquivalent, denn es gilt

$$\Omega \setminus U = \underbrace{(\Omega \cap K) \setminus U}_{\subset K} \dot{\cup} \underbrace{\Omega \setminus (U \cup K)}_{=\Omega \setminus U \cap \Omega \setminus K}$$

Damit ist

$$\Omega = U \dot{\cup} \Omega \setminus U = U \setminus K \dot{\cup} \underbrace{U \cap K \dot{\cup} (\Omega \cap K) \setminus U}_{=: Z} \dot{\cup} \Omega \setminus (U \cup K)$$

Wobei  $K$  nach dem Sardischen Lemma (14.42) und damit auch  $Z$  nach (i) Nullmengen sind. Als Urbild der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  unter der stetigen Abbildung  $\det \phi'$  ist  $K$  abgeschlossen und somit ist  $U \setminus K$  offen. Nach (ii) ist  $\phi$  auf dieser Menge injektiv und nach Definition verschwindet  $\det \phi'$  dort nicht. Also ist  $\phi|_{U \setminus K}$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Weiter bildet nach Lemma 14.24  $\phi$  Nullmengen auf Nullmengen ab, d.h. mit  $Z$  ist auch  $\phi(Z)$  eine Nullmenge. Es gilt

$$f \in \mathfrak{L}(\Upsilon) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{L}(\phi(\Omega)) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{L}(\phi(U \setminus K))$$

Mit den Transformationssatz (14.33) und da  $Z$  eine Nullmenge ist erhalten wir

$$f \in \mathfrak{L}(\phi(U \setminus K)) \Leftrightarrow f \circ \phi \cdot |\det \phi'| \in \mathfrak{L}(U \setminus K) \Leftrightarrow f \circ \phi \cdot |\det \phi'| \in \mathfrak{L}(\Omega)$$

Schließlich liefert der Transformationssatz die Behauptung. □